Ondas electromagnéticas

Ecuaciones de Maxwell y ondas electromagnéticas

Antoni Pérez Navarro

PID_00166263



Índice

Introducción

En los módulos “Electrostática” y “Magnetostática e inducción electromagnética”, habéis visto diversas leyes y comportamientos de los campos eléctrico y magnético. En el primer módulo habéis visto la ley de Gauss y, en el segundo, la ley de Ampère, la ley de Faraday-Lenz y la ley de Gauss para el campo magnético. De hecho, estas leyes no aparecieron de repente, si no que se fueron elaborando a lo largo de más de diez años.

Ampère publicó sus observaciones sobre electricidad y magnetismo entre 1822 (cuando publicó *Recueil d’observations électro-dynamiques* [“Colección de observaciones sobre electrodinámica”]) y 1827 (en su *Théorie mathématique des phénomènes électro-dynamiques uniquement déduite de l’expérience* [“Teoría matemática de los fenómenos electrodinámicos, deducida exclusivamente a partir de los experimentos”]). Gauss formuló su ley en 1835, si bien no se publicó hasta 1867. Faraday y Henry descubrieron, independentmente y prácticamente a la vez, la inducción electromagnética. No obstante, puesto que el trabajo de Faraday se publicó antes, es este el nombre que utilizamos para la ley de inducción. A pesar de ello, Faraday se limitó a dar el módulo de la f.e.m. inducida y fue Lenz quien, en 1834, dio la interpretación física al signo de la corriente inducida: es el signo negativo que aparece en la ley de Faraday-Lenz.

Teorema de Gauss

Lo que hemos visto en el módulo “Electrostática” es la ley de Gauss aplicada al electromagnetismo. Sin embargo, esta es solo una de las aplicaciones del teorema de Gauss, que es un teorema matemático fundamental en geometría diferencial.

Heinrich Friedrich Emil Lenz

Heinrich Friedrich Emil Lenz (Dorpat, 12 de febrero de 1804 - Roma, 10 de febrero de 1865). Químico, físico y matemático estonio. Se le conoce por haber descubierto en qué sentido se produce la corriente inducida. Es por ello que a la ley de Faraday también se la conoce como ley de Faraday-Lenz.

No obstante, las leyes que se iban deduciendo se consideraban ecuaciones que satisfacían, bien el campo electrostático, bien el campo magnético. Solo en el caso de la ley de Faraday vemos que hay una relación explícita entre ambos. Fue Maxwell quien se percató de que, en realidad, esta relación no era una curiosidad si no que era más profunda de lo que parecía *a priori*. Fue él quien descubrió que el campo eléctrico y el campo magnético estaban relacionados y constituían el campo electromagnético. Con esta afirmación, unificó dos campos que, hasta entonces, habían estado separados, y las diversas ecuaciones que hemos visto se convirtieron en las ecuaciones de Maxwell. Fue en 1873 cuando aparecieron por primera vez en su forma moderna*, publicadas en *A Treatise on Electricity and Magnetism* (“Tratado de electricidad y magnetismo”).

*** Cuando decimos que aparecieron las leyes de Maxwell en forma moderna, lo decimos desde un punto de vista conceptual. La notación actual, con vectores, etc. es posterior y se debe a Oliver Heaviside (18 de mayo de 1850 - 3 de febrero de 1925).**

Este nuevo enfoque de Maxwell no fue un simple ejercicio teórico, sino que conllevó una serie de descubrimientos capitales tanto para la ciencia en general como para nuestra vida diaria en particular. Para que os hagáis una idea, de las leyes de Maxwell derivan disciplinas como la telecomunicación o la electrónica. Por tanto, no son solo un elemento de estudio, si no que son uno de los pilares de nuestra civilización.

Ya veis, entonces, que si tuviéramos que estudiar las leyes de Maxwell a fondo y todas sus consecuencias, quizás no acabaríamos nunca y, por tanto, no las podemos abarcar todas en el espacio de este módulo. Nos centraremos, entonces, solo en una, e incluso así, la estudiaremos de forma muy básica: las ondas electromagnéticas.

Hasta ahora, en los módulos “Magnetostática e inducción electromagnética” y “Electrostática” hemos obtenido expresiones que nos permiten calcular los campos eléctrico y magnético para diversas distribuciones de cargas y de corrientes. Fijaos, sin embargo, en lo que hacíamos: realizábamos el cálculo y decíamos que ya teníamos el campo en todo el espacio. ¡En todo el espacio! ¿Quiere decir esto que si ponemos una carga en un punto, instantáneamente todo el universo, incluso las galaxias más lejanas, notará la presencia del campo que crea esta carga?

La respuesta a esta pregunta es que no. Lo que ocurre es que tanto el campo eléctrico como el magnético (lo que denominaremos *campo electromagnético*) se propagan a una velocidad finita y, además, ¡pueden hacerlo en el vacío! Por consiguiente, el campo que crea nuestra carga no aparece instantáneamente en todo el universo, sino que sale de la carga y comienza a alejarse de ella. Lo hace en forma de lo que se conoce como *ondas electromagnéticas*. Estas ondas son un elemento clave de nuestra sociedad o incluso de nuestra civilización: las ondas de radio, las ondas del teléfono móvil, etc., son ondas electromagnéticas.

No obstante, como hemos apuntado, el campo electromagnético se desplaza a una velocidad finita y lo hace en forma de ondas electromagnéticas. Por lo tanto, estamos diciendo que estas también se desplazarán a velocidad finita. Esta velocidad es, en el vacío, igual a $2{,}9979 \cdot 10^8$ m/s, que resulta que coincide con la velocidad de la luz.

> Este resultado es, por lo menos, curioso, y llevó a Maxwell a afirmar, en 1864, en un artículo titulado *A dynamical theory of the electromagnetic field* (“Una teoría dinámica del campo electromagnético”), que:
>
> “El acuerdo de los resultados parece mostrar que la luz y el magnetismo son manifestaciones de una misma sustancia y que la luz no es más que una perturbación electromagnética que se propaga mediante el campo de acuerdo con las leyes electromagnéticas.”

Y efectivamente, Maxwell tenía razón: la luz no es más que una forma de onda electromagnética.

Ya veis, pues, que el módulo nos llevará desde los fundamentos del electromagnetismo hasta las ondas electromagnéticas. La estructura será precisamente esta. En el primer apartado, dedicado a las leyes de Maxwell, reescribiremos estas leyes y veremos que, en realidad, no las habíamos visto completas. Por este motivo, tendremos que completar una, la ley de Ampère, y al hacerlo podréis ver desde un punto de vista cualitativo que esta ley permite que los cam-

pos electromagnéticos se puedan desplazar (lo que denominaremos *propagar*) por el vacío. A continuación, veremos que a partir de las ecuaciones de Maxwell es posible deducir que los campos se pueden propagar en forma de onda y acabaremos esta primera parte expresando los campos eléctrico y magnético en forma de onda. Eso sí, de un tipo de onda que nos simplifica mucho la labor: expresaremos el campo solo para el caso que se conoce como onda armónica, plana y monocromática.

En el segundo apartado del módulo, dedicado a la descripción de las ondas electromagnéticas, profundizaremos más en ellas y veremos cómo las podemos describir. Para hacerlo, definiremos parámetros como la frecuencia, la longitud de onda, el período, etc. Para terminar, introduciremos el espectro electromagnético, que nos permitirá ver que la luz es, efectivamente, una forma de onda electromagnética.

Finalmente, encontraréis un tercer apartado con un conjunto de problemas resueltos con los que podréis poner en práctica los conceptos adquiridos.

Así pues, este módulo va desde los aspectos más abstractos (las leyes de Maxwell) a los más concretos (las ondas electromagnéticas). Las primeras son un conjunto de ecuaciones que constituyen un elemento capital de la historia de la física y de la ciencia y la ingeniería actuales. Nos permiten explicar fenómenos tan aparentemente dispares como por qué nos llega la luz del Sol o por qué podemos comunicarnos a través del teléfono móvil. Y en todos estos fenómenos hay presentes unos “objetos” que derivan de las leyes de Maxwell: las ondas electromagnéticas, unas ondas que estarán muy presentes a lo largo de toda vuestra titulación, puesto que con ellas se puede transmitir información.

Objetivos

Los objetivos que vais a alcanzar con este módulo son los siguientes:

1. Aprender a mirar con espíritu crítico los fundamentos del electromagnetismo.
2. Conocer las leyes de Maxwell y comprender que son la base del electromagnetismo.
3. Entender el concepto de *función de varias variables* y comprender la diferencia entre representar una onda en función del espacio y representarla en función del tiempo.
4. Saber qué es una onda.
5. Comprender cómo se propaga el campo electromagnético en forma de ondas y entender el concepto de *onda viajera*.
6. Entender el concepto de *ondas planas armónicas*.
7. Saber describir una onda mediante la longitud de onda y la frecuencia.
8. Conocer el espectro electromagnético.

1. Ecuaciones de Maxwell

Comenzaremos este módulo por los fundamentos: las **ecuaciones de Maxwell**, que nos permitirán sentar las bases de todo lo que haremos durante el módulo y, sobre todo, entender el porqué del principal fenómeno que estudiaremos: la propagación de los campos electromagnéticos.

James Clerk Maxwell

Físico escocés (Edimburgo, 13 de junio de 1831–Cambridge, 5 de noviembre de 1879) conocido principalmente por haber desarrollado la teoría clásica del electromagnetismo.

El objetivo del módulo no es aprender pasos y demostraciones matemáticas muy complicadas, sino saber qué significan las ecuaciones de Maxwell. Como consecuencia, veréis que a menudo no haremos los pasos matemáticos; en cambio, convendrá que entendáis los conceptos que hay detrás y que, con frecuencia, se encuentran en estas ecuaciones.

Comenzaremos este apartado recopilando lo que ya habéis estudiado. Veréis que, en realidad, en los dos módulos anteriores habéis trabajado con las ecuaciones de Maxwell. Aquí las recopilaremos y las contemplaremos como un todo. Esto nos permitirá detectar una "rareza" y veremos que una de ellas está incompleta. Para completarla, deberemos introducir un concepto nuevo: la corriente de desplazamiento. Hecho esto, ya podremos ver las ecuaciones de Maxwell completas.

Un vez las tengamos, veremos que nos permiten explicar cómo se pueden propagar los campos eléctrico y magnético y que ambos cumplen un tipo de ecuación que se conoce como *ecuación de onda*. Esta es una de las ecuaciones fundamentales de la física, puesto que la cumplen todos los fenómenos ondulatorios, veremos una posible solución de la misma que nos ayudará a entenderla y, más adelante, a comprender el motivo de su nombre.



Algunos fenómenos ondulatorios se estudian en el módulo "Mecánica. Cinemática y dinámica" al hablar del oscilador armónico.

¿Qué aprenderemos?

En este apartado aprenderéis:

- que las ecuaciones de Maxwell no son un conjunto de ecuaciones aisladas, sino que todas juntas constituyen la base del electromagnetismo;
- el concepto de corriente de desplazamiento;
- que los campos eléctrico y magnético se pueden realimentar mutuamente y que ambos cumplen la ecuación de onda.

¿Qué supondremos?

Supondremos que habéis asumido los conocimientos de los módulos "Electrostática" y "Magnetostática e inducción electromagnética". En concreto, vamos a suponer:

- que sabéis qué es un flujo,
- que sabéis qué es una integral de línea,
- que sabéis qué es una integral de superficie,
- que conocéis el campo eléctrico en el interior de un condensador,
- que conocéis y sabéis trabajar con las funciones trigonométricas,
- que sabéis hacer derivadas parciales y derivadas totales,
- que sabéis hacer un producto vectorial.

1.1. Resumen de las leyes de Maxwell

Para comenzar, recopilaremos todo lo que tenemos; en concreto, cuatro ecuaciones que ya hemos visto en módulos anteriores y que corresponden a las ecuaciones (o leyes) de Maxwell.

Las **leyes de Maxwell** en forma integral en el vacío son:

- Ley de Gauss para el campo eléctrico:

$$\oint_S \vec{E}d\vec{S} = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0} \quad (1)$$

- Ley de Gauss para el campo magnético:

$$\oint_S \vec{B}d\vec{S} = 0 \quad (2)$$

- Ley de Faraday-Lenz:

$$\oint_C \vec{E}d\vec{l} = -\frac{d}{dt}\int_S \vec{B}d\vec{S} \quad (3)$$

- Ley de Ampère:

$$\oint_C \vec{B}d\vec{l} = \mu_0 I_{\text{encerrada}} \quad (4)$$

Ecuaciones de Maxwell en forma integral

Hablamos de ecuaciones de Maxwell en forma integral porque hay otra manera de expresarlas: en forma diferencial. Esta forma queda, no obstante, más allá de los objetivos de la asignatura.

Los diversos elementos que aparecen en las leyes de Maxwell son estos:

- $\vec{E}$ y $\vec{B}$ son, respectivamente, los campos eléctrico y magnético.
- $\oint_S \ldots d\vec{S}$ indica la integral sobre una superficie cerrada, S.
- $\oint_C \ldots d\vec{l}$ indica la integral sobre una curva cerrada, C.
- ϵ_0 y μ_0 son, respectivamente, la permitividad eléctrica y la permeabilidad magnética del vacío.

- Q_{int} es la carga encerrada por una superficie gaussiana en la ley de Gauss.
- $I_{encerrada}$ es la intensidad encerrada por la curva de Ampère en la ley de Ampère.

Además, podemos definir el flujo magnético, ϕ_b, de la siguiente manera:

Recordad que ϕ es la letra griega phi, que se lee "fi".

$$\phi_b = \int_S \vec{B} d\vec{S} \quad (5)$$

Entonces, podemos reescribir la ley de Faraday-Lenz de la siguiente manera:

$$\oint_C \vec{E} d\vec{l} = -\frac{d\phi_b}{dt} \quad (6)$$

Michael Faraday

Michael Faraday (Newington Butts, 22 de septiembre de 1791 – Hampton Court, Surrey, 25 de agosto de 1867). Físico y químico inglés. Se le conoce, entre muchos otros trabajos, por su descubrimiento de la inducción electromagnética. La unidad de capacitancia se denomina *farad* o *faradio* (F) en su honor.

Repasemos brevemente qué expresa cada una de las cuatro ecuaciones fundamentales del electromagnetismo, es decir, cada una de las ecuaciones de Maxwell en forma integral:

- La ley de Gauss afirma que el flujo neto de campo eléctrico que atraviesa una superficie cerrada es igual a la carga contenida en esta superficie dividida por la permitividad del medio, ϵ, que en el caso del vacío es ϵ_0. Fijaos que no está hablando del campo eléctrico, sino del flujo de campo eléctrico. Esta ley viene a decir, en palabras coloquiales, que existen cargas eléctricas y que estas son las fuentes del campo eléctrico.

Recordad que ϵ es la letra griega épsilon.

- La ley de Gauss para el campo magnético expresa lo mismo que la ley de Gauss para el campo eléctrico. Sin embargo, puesto que no hay cargas magnéticas,* el flujo de campo magnético a través de una superficie cerrada es, en este caso, igual a cero.

* Si existieran cargas magnéticas las llamaríamos *monopolos magnéticos.*

- La ley de Faraday-Lenz es clave para lo que vamos a estudiar en este módulo y afirma que una variación en el tiempo del flujo de campo magnético produce una fuerza electromotriz inducida, un voltaje: fijaos que la expresión $\oint_C \vec{E} d\vec{l}$ no es más que la expresión para el cálculo del potencial que encontramos en el módulo "Electrostática". Eso sí, advertid que es una integral sobre una línea cerrada. Que tenga que ser cerrada tiene sentido: por un circuito eléctrico solo circulará corriente si está cerrado.

Tened presente la ley de Ampère, que se ve en el módulo "Magnetostática e inducción electromagnética".

- La ley de Ampère afirma que la circulación de campo magnético, es decir, el campo magnético sobre una determinada curva cerrada, será igual a la intensidad que atraviesa esta curva. Esta ley también contiene una información importante: afirma que una intensidad genera un campo magnético, esto es, relaciona el campo magnético con la fuente que lo origina.

Recordad

Los campos magnéticos se crean a partir de intensidades de corriente eléctrica, que no son más que cargas eléctricas en movimiento.

En resumen, las dos primeras ecuaciones de Maxwell, las leyes de Gauss para el campo eléctrico (ecuación 1) y para el magnético (ecuación 2) hacen referencia a las fuentes del campo eléctrico y magnético y nos dicen que existen las cargas eléctricas pero que no existen las magnéticas.

La tercera, la ley de Faraday-Lenz (ecuación 3), y la cuarta, la ley de Ampère (ecuación 4), hacen referencia a las circulaciones del campo eléctrico y del campo magnético. El campo eléctrico está relacionado con la variación del flujo de campo magnético. En cambio, la circulación del campo magnético solo está relacionada con su fuente, la intensidad.

Producto vectorial

Recordad que el producto vectorial de dos vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ es $\vec{A} \times \vec{B} = A \cdot B \operatorname{sen} \alpha$, donde α es el ángulo que forman. Además, el vector resultante es perpendicular a $\vec{A}$ y a $\vec{B}$ y va en la dirección que indica la regla de la mano derecha al llevar el primer vector, $\vec{A}$, sobre el segundo, $\vec{B}$.

Vemos, pues, que si el flujo de campo magnético varía con el tiempo, se produce un campo eléctrico; pero, en cambio, si el flujo de campo eléctrico varía con el tiempo, parece que no se produce un campo magnético. Como mínimo las ecuaciones no indican nada sobre este hecho. ¿No os parece extraño? ¿Qué tiene el campo magnético que es tan especial? ¿Por qué podemos producir un campo eléctrico a partir del campo magnético, pero no a la inversa? ¿Podría ser que estas ecuaciones tan importantes estuvieran mal?

La respuesta a todas estas preguntas está incluida, de hecho, en una respuesta afirmativa a la última pregunta: efectivamente, ¡las ecuaciones están mal! Después de insistir tanto en su importancia, ¡ahora resulta que fallan! Bien, hemos exagerado un poco; de hecho no es que estén mal, si no que hay una que está incompleta. A continuación, os mostraremos esta incompletitud y lo haremos con un elemento tan real y tan común como un condensador. Veréis que, con la ecuación completa, seremos capaces de producir un campo magnético a partir de variaciones del flujo de campo eléctrico.

1.2. Incompletitud de la ley de Ampère

Hemos dicho que las ecuaciones de Maxwell (ecuaciones 1, 2, 3 y 4) estaban incompletas, y nos ha hecho pensar en ello el ver que una variación del flujo de campo magnético es capaz de producir un campo eléctrico, pero que no ocurre a la inversa. Esto nos da una pista de cuál es la ecuación que habrá que corregir.

André-Marie Ampère

André-Marie Ampère (Poleymieux-lès-Mont-d'Or, 20 de enero de 1775 – Marsella, 10 de junio de 1836), físico y matemático francés. Se le conoce por haber descubierto las interacciones mutuas entre conductores atravesados por corrientes eléctricas. La unidad de intensidad se denomina *ampere* o *amperio* (A) en su honor.

Fijaos que, en la ecuación 3, la ley de Faraday-Lenz, tenemos que la variación del flujo de campo magnético está relacionada con la circulación del campo eléctrico. Podríamos esperar, por tanto, que una variación del flujo de campo eléctrico estuviera relacionada con la circulación del campo magnético, es decir, parece que la ley de Ampère (ecuación 4) podría estar incompleta. ¡Veámoslo!

Como queremos ver si la ley de Ampère está incompleta, comencemos observando esta ley y recordando cómo trabajamos con ella. Según la ley de Ampère, si tomamos una curva cerrada cualquiera, la integral del campo magnético

En el módulo "Magnetostática e inducción electromagnética" se trabaja con la ley de Ampère.

μ_0 se lee "mu sub cero".

sobre esta curva será μ_0 multiplicada por la intensidad de la corriente que la atraviesa. Es precisamente lo que dice la ecuación 4. Ahora bien, ¿qué quiere decir que la intensidad "atraviesa" una curva? Más explícitamente, esto quiere decir que atraviesa la **superficie encerrada por la curva**. En la figura 1a tenéis representado un ejemplo de esta situación: una intensidad I y una curva de Ampère que la envuelve, con la superficie, S_1, que encierra esta curva. Fijaos cómo la intensidad atraviesa la superficie; es esto lo que queremos decir cuando decimos que la intensidad "atraviesa la curva".

Figura 1. Curva de Ampère

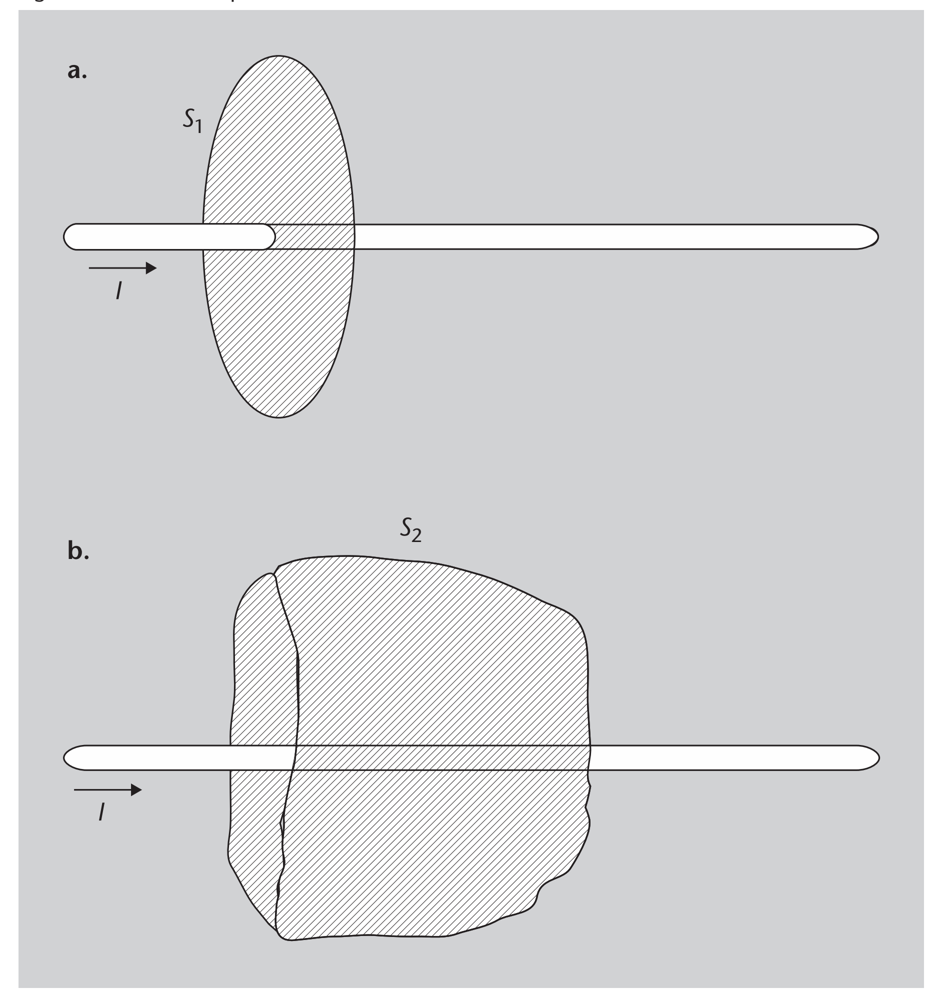


Figura 1

Curva de Ampère en un hilo por el que circula una intensidad. En la figura se indica cuál es la superficie que atraviesa la intensidad.
a. Se toma la superficie S_1, que es la más pequeña encerrada por la curva.
b. Se toma una superficie S_2 cualquiera, encerrada por una curva cualquiera alrededor de la intensidad I.

Posiblemente, si os hubiéramos pedido que dibujarais la superficie cerrada por la curva de Ampère de la figura, hubierais dibujado la que tenéis en la figura 1a. Ahora bien, ¿es la superficie que hemos pintado la única posible? Fijaos que la ley de Ampère solo hace referencia a la intensidad que atraviesa la curva, pero no a cómo debe ser la superficie encerrada por esta curva. Por tanto, podríamos haber escogido una superficie, S_2, como la que tenéis en la figura 1b.

En los problemas que habéis hecho en el módulo "Magnetostática e inducción electromagnética" sobre la ley de Ampère, podíais escoger una superficie u otra. En cualquiera de ambos casos, la ley de Ampère (ecuación 4) afirma que la circulación del campo magnético sobre la curva de Ampère ($\oint \vec{B}d\vec{l}$) será la

intensidad I que atraviesa la superficie encerrada por la curva (S_1 o S_2 en la figura 1, es indiferente) multiplicada por la permeabilidad del medio, en este caso, del vacío, μ_0:

$$\oint \vec{B}d\vec{l} = \mu_0 I \tag{7}$$

Ahora bien, imaginad que tenemos un circuito con un condensador. Ya veis que no se trata de una situación descabellada: abrid cualquier radio o cualquier aparato electrónico y encontraréis condensadores. Si repetimos la figura 1, pero ponemos un condensador en el circuito, hallaremos el caso de la figura 2.

Figura 2. Comparación de dos superficies cerradas por una curva de Ampère

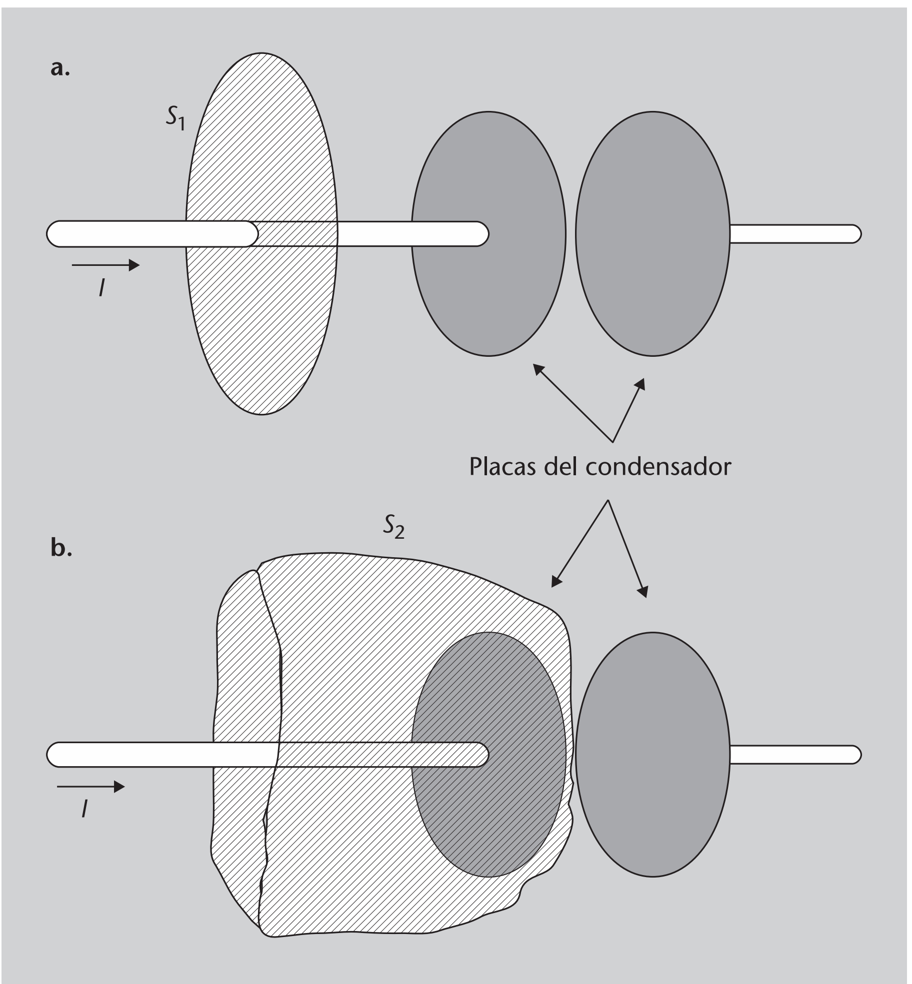


Figura 2

Curva de Ampère en un circuito. En la figura se indica cuál es la superficie que atraviesa la intensidad.
a. Se toma la superficie S_1, que es la más pequeña encerrada por la curva.
b. Se toma una superficie S_2 que pasa entre las placas del condensador, encerrada por una curva cualquiera alrededor de la intensidad I.

Apliquemos ahora la ley de Ampère para cada una de las superficies. Quizás penséis que no es necesario porque deberíamos obtener los mismo. ¿Seguro? ¡Veámoslo!:

- Superficie 1. El resultado será el mismo que hemos visto en la ecuación 7:

$$\oint \vec{B}d\vec{l} = \mu_0 I \tag{8}$$

- Superficie 2. En este caso no hay ninguna intensidad que atraviese la superficie (fijaos que está entre las placas del condensador), por tanto, tenemos:

$$\oint \vec{B}d\vec{l} = 0 \tag{9}$$

¡Obtenemos dos resultados diferentes! Deberíamos haber obtenido lo mismo, puesto que la ley de Ampère no debería depender de la superficie que escogemos como superficie cerrada por la curva. ¿Qué ha ocurrido aquí?

Para responder a esta pregunta veremos que la ley de Ampère es incompleta y es preciso añadirle un término nuevo. Veamos a continuación cuál es este término.

1.3. La corriente de desplazamiento

¿Cómo podemos saber qué término falta en la ley de Ampère (ecuación 4)? ¿Por dónde comenzamos? ¿Cómo podemos encontrar en una ecuación un término que no sabemos qué es? Bien, tenemos algunas pistas:

1) El elemento nuevo que hemos introducido y que nos ha hecho ver que algo no iba bien, es el condensador. Por tanto, parece razonable suponer que cuando el condensador no estaba, todo iba bien.

2) El resultado no puede depender de una elección arbitraria nuestra, por lo que las ecuaciones 8 y 9 deberían ser iguales y, si además hemos dicho que el resultado era correcto cuando no teníamos el condensador, podemos decir que el término que nos falta en la ecuación 9 deberá ser igual a $\mu_0 I$.

De todo ello podemos deducir que lo que ya teníamos está bien y que nos falta sumar un término. Además, como sabemos que deberá ser del tipo $\mu_0 I$, las unidades del nuevo término deberán ser las mismas que tiene $\mu_0 I$, puesto que solo podemos sumar términos con las mismas unidades. Así pues, el nuevo término deberá ser de la forma:

$$\mu_0 I_D \tag{10}$$

donde hemos simbolizado la intensidad con I_D en lugar de I para distinguirla de la que hay en la ley de Ampère (ecuación 4). De hecho, esta intensidad, la de la ecuación 10, se denomina **corriente de desplazamiento**. Por consiguiente, podemos decir que la ley de Ampère completa deberá ser de la forma:

$$\oint \vec{B}d\vec{l} = \mu_0 I + \mu_0 I_D \tag{11}$$

Con esta nueva corriente, en el caso de la superficie 2 tendríamos que la ecuación 9 queda:

$$\oint \vec{B}d\vec{l} = \mu_0 I_D \tag{12}$$

Si $I_D = I$, ya tenemos que las ecuaciones 9 y 8 son iguales. Con esto el problema estaría solucionado. No obstante, parece que nos lo hayamos sacado de la manga. ¿Qué es esta corriente de desplazamiento? ¿Existe realmente? Y si existe realmente, ¿cómo se calcula?

Para responder a estas preguntas debemos tener presente la situación en la que la hemos encontrado. La hemos "visto" al tomar la superficie 2 (S_2) de la figura 2. Era como si la intensidad hubiera desaparecido de repente cuando ha llegado a las placas del condensador. ¿Qué ha pasado con esta intensidad? No puede haber desaparecido sin más. Debe de haber algo que la haya sustituido y que esté relacionado con la intensidad. Y, efectivamente, lo hay.

Sabemos que entre las placas de un condensador hay un campo eléctrico, cuyo módulo es:

El campo eléctrico entre las placas de un condensador se estudia en el módulo "Electrostática".

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \tag{13}$$

donde σ es la densidad de carga superficial que hay en las placas. El campo, además, es perpendicular a las placas, como podéis ver en la figura 3.

Figura 3. Campo en el interior de un condensador de placas circulares de radio R

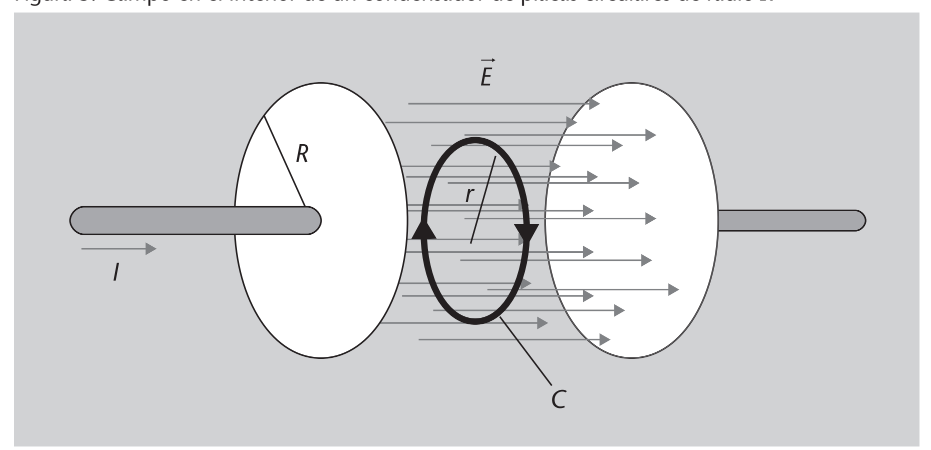


Figura 3

Podéis ver que el campo va desde la placa positiva hasta la negativa y que las líneas de campo son paralelas entre sí.

Ahora bien, según si las placas son más grandes o más pequeñas, habrá más o menos líneas de campo. Por consiguiente, más importante que el campo eléctrico es, en este caso, el flujo de campo eléctrico, ϕ_e. Para ver la idea que hay detrás, tomaremos placas redondas de radio R como las que tenéis en la figura 3, puesto que sabemos calcular el área, y calcularemos el flujo de campo eléctrico.

El flujo de una magnitud es la integral de esta magnitud sobre la superficie en la cual queremos calcularlo. En el caso del campo eléctrico será:

$$\phi_e = \int_S \vec{E} d\vec{S} \quad (14)$$

Recordad que ϕ es la letra griega phi, que se lee "fi".

Sin embargo, dado que el campo entre las placas de un condensador es perpendicular a estas placas y, por tanto, paralelo al vector superficie, como podéis ver en la figura 4, tenemos que el producto escalar será el producto de módulos:

$$\phi_e = \int_S E dS \quad (15)$$

Producto escalar

El producto escalar de dos vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ es $\vec{A} \cdot \vec{B} = A \cdot B \cdot \cos\alpha$, donde α es el ángulo que forman $\vec{A}$ y $\vec{B}$. Si los vectores son paralelos, $\alpha = 0$, $\cos\alpha = 1$ y, por tanto, $\vec{A} \cdot \vec{B} = A \cdot B$.

Figura 4. Campo y vector superficie en el interior de un condensador

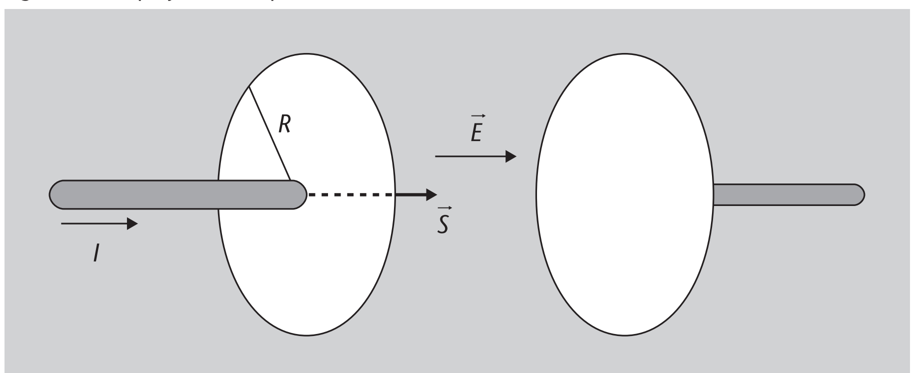


Figura 4

Campo y vector superficie en el interior de un condensador de placas planas paralelas y circulares de radio R. Podéis ver que el vector campo $\vec{E}$ y el vector superficie $\vec{S}$ son paralelos.

Finalmente, dado que el campo es constante dentro de las placas del condensador (véase la ecuación 13), puede salir fuera de la integral:

$$\phi_e = E \int_S dS = E \cdot S \quad (16)$$

Recordad

La integral de una diferencial de la misma variable que se está integrando es, simplemente, aquella variable. Es decir:

$$\int dx = x$$

El campo lo tenemos en la ecuación 13 y la superficie de un círculo* es πR^2. Así obtenemos:

*** Recordad que hemos tomado un condensador de placas circulares de radio R.**

$$\phi_e = E \cdot S = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \pi R^2 = \frac{\sigma \pi R^2}{\epsilon_0} \quad (17)$$

Recordad que el área del círculo es: $A_{círculo} = \pi R^2$, donde R es el radio.

Por otro lado, la densidad de carga, σ, multiplicada por el área, que es πR^2, es la carga total:

$$\phi_e = \frac{\sigma \pi R^2}{\epsilon_0} = \frac{Q}{\epsilon_0} \quad (18)$$

Recordad

Cuando tenemos una densidad de carga superficial σ constante, la carga total Q es $Q = \sigma S$, donde S es la superficie total en que hay densidad de carga.

Es importante no perder de vista a dónde queremos llegar: queremos saber cómo calcular el nuevo término I_D de la ecuación 11. Es decir, queremos encontrar una intensidad. Lo que estamos haciendo ahora es ver cómo la podemos

encontrar. Para hacerlo hemos visto que la intensidad que llega al condensador se transforma en flujo de campo eléctrico y en la ecuación 18 vemos que este flujo está relacionado con la carga. Pero, ¿hay alguna relación entre carga e intensidad?

¡Pues sí! Y la relación está en la misma definición de intensidad:

Tened presente la definición de intensidad del módulo "Electrostática".

$$I_D = \frac{dQ}{dt} \tag{19}$$

Luego, si despejamos la carga de la ecuación 18 tenemos:

$$Q = \phi_e \epsilon_0 \tag{20}$$

Y si sustituimos la Q obtenida en la ecuación 19, encontramos una expresión para la I_D:

$$I_D = \frac{d(\epsilon_0 \phi_e)}{dt} \tag{21}$$

En el caso de materiales isótropos, homogéneos y lineales (los que nos ocupan, en definitiva), la ϵ_0 puede salir de la derivada y llegamos a la definición de corriente de desplazamiento:

Véase el módulo "Electrostática" para saber cómo es un material isótropo, homogéneo y lineal (i. h. l.)

$$I_D = \epsilon_0 \frac{d\phi_e}{dt} \tag{22}$$

Material isótropo, homogéneo y lineal (i. h. l.)

Si un material es isótropo, sus propiedades son independientes de la dirección; si es homogéneo, sus propiedades son independientes de la posición; y si es lineal, sus propiedades son directamente proporcionales al campo aplicado (es decir, varían linealmente con el campo).

¡Y ya tenemos cómo calcular la corriente de desplazamiento! Por lo tanto, si sustituimos la ecuación 22 en la 11, la ley de Ampère queda así:

$$\oint \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 I + \epsilon_0 \frac{d\phi_e}{dt} \tag{23}$$

Es decir, la circulación del campo magnético, $\oint \vec{B} d\vec{l}$, depende de la intensidad que atraviesa la curva de Ampère y de la corriente de desplazamiento, I_D:

$$\oint \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 I_{\text{encerrada}} + \mu_0 I_D \tag{24}$$

En materiales isótropos, homogéneos y lineales (i. h. l.) se define la corriente de desplazamiento, I_D, como la derivada del flujo de campo eléctrico, ϕ_e, con respecto al tiempo, multiplicada por la permitividad del medio (ϵ_0 en el caso del vacío):

$$I_D = \epsilon_0 \frac{d\phi_e}{dt} \tag{25}$$

donde:

$$\phi_e = \int_S \vec{E} d\vec{S} \quad (26)$$

$\vec{E}$ es el campo eléctrico y $\vec{S}$ la superficie a cuyo través calculamos este flujo.

Ejemplo de cálculo de la corriente de desplazamiento

Tenemos un campo eléctrico variable que viene dado por la expresión:

$$\vec{E} = 5\,\text{sen}(400t)\vec{i}\ \text{N/C} \quad (27)$$

a) Calculad la corriente de desplazamiento debida a este campo sobre un cuadrado de 1 m de lado colocado perpendicularmente al campo (es decir, en el plano *yz*).

b) ¿Cuál sería la corriente de desplazamiento sobre el cuadrado si éste estuviera en el plano *xy*?

c) ¿Cuál sería la corriente de desplazamiento sobre el cuadrado si éste estuviera en un plano que formara 45° con el plano *xy*?

Solución

En los tres apartados debemos encontrar la corriente de desplazamiento. La estrategia para hacerlo es:

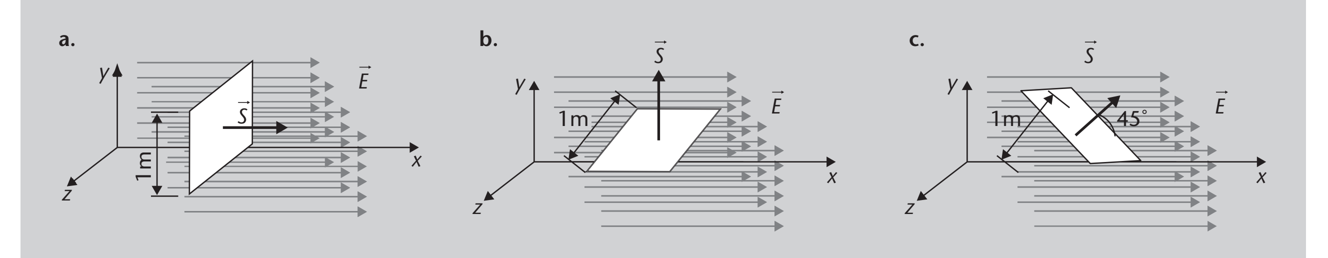
1) Hallar el flujo de campo eléctrico con la ecuación 26.
2) Derivar el flujo y dividir por ϵ_0, tal como indica la ecuación 25.

Las tres situaciones que se piden en el problema están representadas en la figura 5.

Figura 5

Las tres situaciones que se piden en el ejemplo. En la figura se representan los vectores campo $\vec{E}$ y superficie $\vec{S}$.
a. La superficie es perpendicular al campo (y, por tanto, el vector superficie es paralelo al campo).
b. La superficie es paralela al campo (y, por tanto, el vector superficie es perpendicular al campo);
c. La superficie y el campo forman un ángulo de 45°.

Figura 5. Situaciones del ejemplo de cálculo de la corriente de desplazamiento



Dispongámonos a solucionar, pues, cada apartado.

a) En el primer caso tenemos la situación de la figura 5a, en que el vector superficie y el vector campo eléctrico son paralelos. Comencemos por calcular el flujo a través de esta superficie mediante la expresión 26:

$$\phi_e = \int_S \vec{E} \cdot d\vec{S} \quad (28)$$

Dado que la superficie no está curvada, independientemente del $d\vec{S}$ que consideremos, siempre irá en la dirección de $\vec{S}$. Por tanto, $\vec{E}$ y $d\vec{S}$ son paralelos (forman un ángulo de 0°) y, si recordáis cómo se calcula el producto escalar y que el coseno de 0 es igual a 1, encontramos que:

$$\vec{E} \cdot d\vec{S} = E \cdot dS \cdot \cos 0^\circ = E \cdot dS \quad (29)$$

Recordad

El producto escalar de dos vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ que forman un ángulo α es:
$\vec{A} \cdot \vec{B} = A \cdot B \cdot \cos\alpha$.

Si sustituimos este resultado en la ecuación 28, obtenemos:

$$\phi_e = \int_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int_S E \cdot dS \qquad (30)$$

Ahora fijaos bien que estamos haciendo una integral sobre la superficie, y no sobre el tiempo. Esto es importante, porque el campo eléctrico del enunciado dado por la expresión 27 varía en el tiempo pero no en el espacio. Por tanto, es el mismo en toda la superficie. Como consecuencia, podemos sacar el campo de la integral de la ecuación 30:

$$\phi_e = \int_S E \cdot dS = E \int_S dS \qquad (31)$$

Pero la integral de dS es simplemente S. Por tanto:

$$\phi_e = E \cdot S \qquad (32)$$

La expresión de E, la extraemos de la ecuación 27 (y fijaos que solo necesitamos el módulo). Para conseguir la expresión de S solo necesitamos aplicar que el área de un cuadrado es el producto de los lados: $S = 1$ m^2:

$$\phi_e = E \cdot S = 5\,\text{sen}(400t) \cdot 1 = 5\,\text{sen}(400t) \text{ N/C} \cdot \text{m}^2 \qquad (33)$$

Recordad

La integral de una diferencial de la misma variable que se está integrando es, simplemente, aquella variable. Esto es:

$$\int dx = x$$

Y ya tenemos el flujo. El paso siguiente es calcular la corriente de desplazamiento con la expresión 25 y utilizando el resultado que acabamos de obtener (ecuación 33):

$$I_D = \epsilon_0 \frac{d\phi_e}{dt} = 5 \cdot 400 \cos(400t) = 2.000 \cos(400t) \text{ A} \qquad (34)$$

Recordad

$\frac{d}{dx}\,\text{sen}(f(x)) = \frac{df(x)}{dx}\cos(f(x))$.

Y ya tenemos la corriente de desplazamiento.

b) En este caso, fijaos en que el procedimiento es exactamente igual que en el apartado *a*. La diferencia está en el ángulo que forman $\vec{E}$ y $d\vec{S}$. Ahora forman un ángulo de 90°, como podéis ver en la figura 5b. Por tanto, al calcular el producto de la ecuación 29, tenemos:

$$\vec{E} \cdot d\vec{S} = E \cdot dS \cdot \cos 90^\circ = 0 \qquad (35)$$

Y por tanto, el flujo queda:

$$\phi_e = \int_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = 0 \qquad (36)$$

La corriente de desplazamiento será, en consecuencia, también 0:

$$I_D = \epsilon_0 \frac{d\phi_e}{dt} = 0 \qquad (37)$$

Hagamos ahora el tercer apartado y después ya comentaremos un poco los resultados.

c) En este caso, el procedimiento vuelve a ser el mismo, y, por tanto, nos limitaremos a indicar los resultados. En esta ocasión, la diferencia es que $\vec{E}$ y $d\vec{S}$ forman un ángulo de 45°. Entonces, la ecuación 29 queda:

$$\vec{E} \cdot d\vec{S} = E \cdot dS \cdot \cos 45^\circ \qquad (38)$$

El equivalente de la ecuación 33 será ahora:

$$\phi_e = E \cdot S = 5\,\text{sen}(400t) \cdot 1 \cdot \cos 45^\circ = 5\frac{\sqrt{2}}{2}\,\text{sen}(400t)\ \text{N/C} \cdot \text{m}^2 \qquad (39)$$

donde hemos utilizado que $\cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

La corriente de desplazamiento será, entonces (el equivalente de la expresión 34):

$$I_D = \epsilon_0 \frac{d\phi_e}{dt} = 5 \cdot 400 \frac{\sqrt{2}}{2} \cos(400t) = 1.000\sqrt{2}\cos(400t)\ \text{A} \qquad (40)$$

Ya tenemos completados los tres cálculos. Fijaos que el resultado que nos da un valor más grande es el del apartado *a*, ecuación 34, cuando $\vec{E}$ y $d\vec{S}$ son paralelos; mientras que el más pequeño (que es 0) lo obtenemos con el apartado *b*, ecuación 37, cuando $\vec{E}$ y $d\vec{S}$ son perpendiculares. Esto se debe al producto escalar que hay en la definición del flujo (ecuación 28). Si miráis las expresiones 29, 35 y 38, podéis ver que el ángulo que forman $\vec{E}$ y $d\vec{S}$ es lo que determina que la corriente de desplazamiento sea más grande o más pequeña. Una manera de expresarlo sería decir que solo contribuye a la corriente de desplazamiento la parte de $\vec{E}$ que está en la dirección del vector superficie.

Llegados a este punto, ya podemos escribir las ecuaciones de Maxwell completas.

1.4. Las ecuaciones de Maxwell completas

Después de haber completado la ley de Ampère, podemos volver a escribir las leyes de Maxwell. Como veréis, las ecuaciones 1, 2 y 3 quedan igual, y solo cambia la ecuación 4.

Las leyes de Maxwell completas en forma integral en el vacío, para materiales isótropos, homogéneos y lineales, son:

- Ley de Gauss para el campo eléctrico:

$$\oint_S \vec{E} d\vec{S} = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0} \qquad (41)$$

- Ley de Gauss para el campo magnético:

$$\oint_S \vec{B} d\vec{S} = 0 \qquad (42)$$

- Ley de Faraday-Lenz:

$$\oint_C \vec{E} d\vec{l} = -\frac{d}{dt}\int_S \vec{B} d\vec{S} \qquad (43)$$

- Ley de Ampère:

$$\oint_C \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 I_{\text{encerrada}} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{d}{dt}\int_S \vec{E} d\vec{S} \qquad (44)$$

Los diversos elementos de las leyes de Maxwell son:

- $\vec{E}$ y $\vec{B}$ son, respectivamente, los campos eléctrico y magnético.
- $\oint_S \ldots d\vec{S}$ indica la integral sobre una superficie cerrada, S.
- $\oint_C \ldots d\vec{l}$ indica la integral sobre una curva cerrada, C.
- μ_0 es la permeabilidad magnética del vacío.
- ϵ_0 es la permitividad eléctrica del vacío.
- Q_{int} es la carga encerrada por la superficie gaussiana en la ley de Gauss.
- $I_{\text{encerrada}}$ es la intensidad encerrada por la curva de Ampère en la ley de Ampère.

La integral sobre una superficie cerrada se estudia en el módulo "Electrostática" y la integral sobre una curva cerrada, en el módulo "Magnetostática e inducción electromagnética".

Integral cerrada

Recordad que el símbolo $\oint$ indica integral cerrada. Así, cuando hallamos $\oint_C$ quiere decir que debemos hacer la integral en toda una curva cerrada; y cuando hallamos $\oint_S$ quiere decir que debemos hacerla en toda una superficie cerrada.

Además, se pueden establecer las siguientes definiciones :

- Flujo eléctrico, ϕ_e:

$$\phi_e = \int_S \vec{E} d\vec{S} \tag{45}$$

- Flujo magnético, ϕ_b:

$$\phi_b = \int_S \vec{B} d\vec{S} \tag{46}$$

- Corriente de desplazamiento, I_D:

$$I_D = \epsilon_0 \frac{d}{dt} \int_S \vec{E} d\vec{S} \tag{47}$$

Fijaos que con estas ecuaciones, si el flujo de campo magnético varía con el tiempo, genera un campo eléctrico (ley de Faraday-Lenz, ecuación 43), pero ahora, además, si el flujo de campo eléctrico varía con el tiempo, genera un campo magnético (ley de Ampère, ecuación 44). A continuación, en el subapartado siguiente veremos un ejemplo matemático de cómo poder conseguir esta situación.

1.5. Propagación del campo electromagnético

Como hemos dicho al final del subapartado anterior, fijaos en dos hechos:

- De la ley de Faraday-Lenz (ecuación 43) podéis ver que un campo magnético que varía con el tiempo puede generar un campo eléctrico.
- De la ley de Ampère (ecuación 44) podéis ver que un campo eléctrico que varía con el tiempo puede generar un campo magnético.

Observad que aquí nos hemos centrado en el caso en que los campos eléctrico y magnético varían con el tiempo. De hecho, lo que debe variar con el tiempo es el flujo, por tanto también podría ser que los campos fueran constantes y lo que variara fuera el flujo o, dicho de otra manera, la posición relativa de la

superficie sobre la cual calculamos el flujo, con el campo (pensad en una espira girando en un campo magnético constante, por ejemplo).

Con estos dos hechos ya es suficiente para que los campos eléctrico y magnético se puedan propagar. Para verlo, imaginad una situación en que el campo magnético varíe con el tiempo, de tal modo que el campo eléctrico que genera según la ley de Faraday (ecuación 43) también varíe en el tiempo; esto es, que el campo magnético viene dado por una función que depende del tiempo y que, al derivarla, sigue dependiendo del tiempo.

Entonces, si el campo eléctrico obtenido varía en el tiempo, éste generará, a su vez, un campo magnético, siguiendo la ley de Ampère (ecuación 44). Si este campo magnético generado también depende del tiempo, es decir, la derivada del campo eléctrico vuelve a depender del tiempo, volveremos a tener la situación inicial y volveremos a comenzar el ciclo. ¿Os dais cuenta de lo que significa esta situación? Significa que los campos eléctrico y magnético se irán realimentando indefinidamente.

Fijaos en lo que debe ocurrir para que se produzca esta situación: que la función que describe un campo dependa del tiempo, que lo haga de manera que la podamos ir derivando indefinidamente y que siempre dependa del tiempo. ¿Se os ocurre alguna función así? Veremos una en el ejemplo siguiente.

Ejemplo

Pensad en una función f que dependa de una variable, que para nosotros ahora será el tiempo t (por tanto la función será $f(t)$), y que se pueda ir derivando indefinidamente sin que podamos hallar nunca que la derivada es 0.

Solución

Fijaos por ejemplo en la siguiente función:

$$f(t) = A\cos(\omega t) \tag{48}$$

No os preocupéis ahora por lo que son A o ω. Centraos en la función en sí. Es una función que varía con el tiempo. Si la derivamos con respecto al tiempo, tenemos:

$$\frac{df(t)}{dt} = -A\omega\,\text{sen}(\omega t) \tag{49}$$

que también varía con el tiempo. Y si ésta la volvemos a derivar con respecto al tiempo, obtenemos:

$$\frac{d^2f(t)}{dt^2} = -A\omega^2\cos(\omega t) \tag{50}$$

Volveremos a tener un coseno, que es la función inicial con que hemos comenzado, de manera que ya volvemos a tener el ciclo. De hecho, también podríamos conseguir esta situación con una función exponencial, pero en el fondo sería lo mismo, porque hay una relación directa entre la función exponencial y las funciones trigonométricas.

Así pues, ya veis que con un campo variable en el tiempo, según una función coseno, ya tendríamos la situación que nos pedían.

Recordad

$\frac{d}{dx}(\text{sen}(g(x))) = \frac{dg(x)}{dx}\cos(g(x))$ y $\frac{d}{dx}(\cos(g(x))) = -\frac{dg(x)}{dx}\text{sen}(g(x))$, donde $g(x)$ es una función que depende de x.

Recordad

La notación $\frac{d^2f(t)}{dt^2}$ significa que derivamos dos veces la función $f(t)$ con respecto al tiempo.

Recordad

Podemos escribir una exponencial compleja como: $e^{j\omega t} = \cos\omega t + j\,\text{sen}\,\omega t$

En el ejemplo anterior hemos visto que una función coseno como la que tenéis en la ecuación 48 cumple los requisitos para que la podamos ir derivando indefinidamente sin perder la dependencia en el tiempo. Por tanto, como hemos dicho al principio del apartado, si ocurre esto, los campos eléctrico y magnético se podrán ir realimentando mutuamente.

Ahora bien, ¿es posible esta situación? ¿La encontramos en la naturaleza? Pues sí, y es más habitual de lo que parece. Para que os hagáis una idea de hasta qué punto es un fenómeno cotidiano, solo os diremos que la luz que nos llega del Sol (o incluso de las estrellas y, de hecho, toda la luz) es un ejemplo de ello.

Hemos hallado, así, que es posible que los campos eléctrico y magnético se vayan realimentando mutuamente. Por tanto, siempre que esto ocurra, no tendremos un campo eléctrico o uno magnético por separado, sino que tendremos ambos. Es por ello que a menudo, en lugar de referirnos a cada campo por separado, hablaremos de **campo electromagnético**. !

Ahora que sabemos cómo se genera el campo electromagnético, intentemos determinar cómo se propaga. Para ello, no vamos a abandonar las leyes de Maxwell, sino que partiremos de una ecuación que se deriva de ellas y que cumplen tanto el campo eléctrico como el campo magnético: la ecuación de onda.

1.6. La ecuación de onda

En el subapartado 1.5 habéis podido ver que es posible generar un campo electromagnético de forma que los campos eléctrico y magnético se vayan realimentando mutua e indefinidamente. Esto lo hemos visto a partir de las leyes de Faraday (la ecuación 43) y de Ampère (ecuación 44).

Pues bien, se puede demostrar, a partir de las leyes de Ampère y de Faraday que los campos eléctrico, $\vec{E}$, y magnético, $\vec{B}$, cumplen, en un medio lineal, unas ecuaciones que tienen la siguiente forma*:

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \tag{51}$$

$$\frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} \tag{52}$$

donde x es el punto en el que estamos observando el campo ($\vec{E}$ o $\vec{B}$), es decir, la posición, y t es el tiempo que los campos tardan en llegar a él.

*** Demostrar cómo se llega queda más allá de los objetivos del módulo.**

Derivada parcial

Recordad que el símbolo $\frac{\partial f}{\partial t}$ indica la derivada parcial de la función f con respecto a t. Esto quiere decir que derivamos f con respecto a t y tratamos como constante cualquier otra variable que pueda contener.

Estas ecuaciones nos están diciendo que si derivamos dos veces un campo ($\vec{E}$ o $\vec{B}$) con respecto a la posición (x), el resultado será igual que derivar dos veces el

mismo campo ($\vec{E}$ o $\vec{B}$) con respecto al tiempo (t) pero dividido por la velocidad de la luz (c) al cuadrado. Si os fijáis, ambas ecuaciones tienen la misma forma:

$$\frac{\partial^2 f(x,t)}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 f(x,t)}{\partial t^2} \tag{53}$$

Este tipo de ecuación se denomina **ecuación de onda** y es una de las ecuaciones fundamentales de la física. Es por ello que os la hemos querido presentar a pesar de no haberla deducido.

Una característica de la ecuación de onda es que derivamos con respecto a x y con respecto a t; por tanto, hemos puesto una función $f(x,t)$ que depende tanto de x como de t; es lo que se conoce como *función de varias variables*. Precisamente, antes de continuar con el tema principal, haremos un breve inciso sobre este tipo de funciones.

1.7. Funciones de varias variables

En el subapartado anterior hemos visto la ecuación de onda (ecuación 53) en que hay una derivada parcial de una función f con respecto al tiempo (t) igualada a una derivada parcial con respecto al espacio (x). Esto significa que si la función no depende de x y de t simultáneamente, un miembro de la ecuación será igual a cero. Es necesario, pues, que una función f que cumpla la ecuación de onda dependa tanto de x como de t. Por ello hemos escrito $f(x,t)$, que significa que la función f depende tanto de x como de t, es decir, depende de dos variables.

¿Qué significa, sin embargo, que una función dependa de dos (¡o más!) variables? Pues básicamente lo que su nombre indica, que la función varía cuando varía con más de un elemento. Este tema, por sí solo, constituye una asignatura completa en titulaciones como matemáticas y física. Aquí, sin embargo, solo pretendemos que entendáis un poco la idea. Para hacerlo, utilizaremos la siguiente función:

$$f(x,t) = A\cos(\omega t - kx) \tag{54}$$

Fijaos en que es una función que depende de x y de t. A pesar de que sea un concepto matemático y de que x y t puedan ser dos variables cualesquiera, como estamos haciendo física, x será la posición y t, el tiempo. A, k y ω son constantes; las hemos puesto para que os acostumbréis a verlas, ya que a lo largo del módulo aparecerán diversas veces ecuaciones con la misma forma que la expresión 54.

Imaginad ahora que os estáis "quietos" en un sitio (x fija). Para hacerlo fácil vamos a considerar $x = 0$, con lo cual queda:

$$f(0,t) = A\cos(\omega t) \tag{55}$$

Veréis que la función va variando a medida que pasa el tiempo. Es lo que tenéis representado en la figura 6. Fijaos en que, a efectos prácticos, es como si la x no estuviera o fuera una constante más. Físicamente sería lo que hacemos al calcular una derivada parcial con respecto al tiempo, como tenéis en la ecuación 53.

Figura 6. Función $f(x,t)$ que depende de la posición, x, y del tiempo, t, con la posición fija

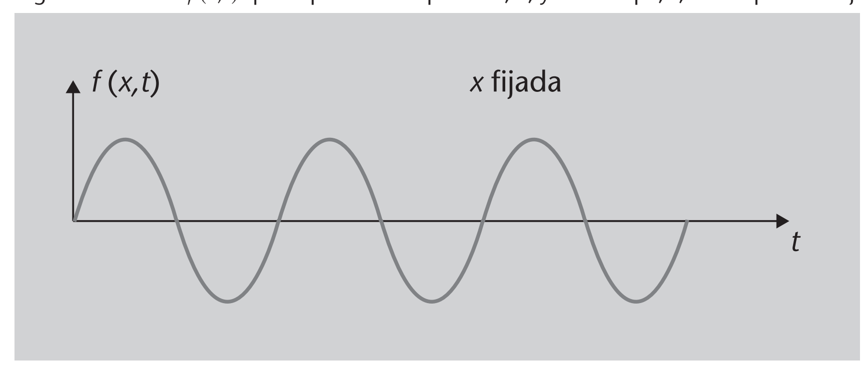


Figura 6

Fijaos en que el eje de abscisas es el tiempo t.

Ahora mantendremos fijo el tiempo. Imaginad que "congeláis" la función en un instante de tiempo y miráis qué aspecto tiene (véase la figura 7). Ahora trataremos el tiempo como una constante y, por simplicidad, podéis escoger el instante inicial, $t = 0$:

$$f(x,0) = A\cos(-kx) \tag{56}$$

Figura 7. Función $f(x,t)$ que depende de la posición, x, y del tiempo, t, con el tiempo fijo

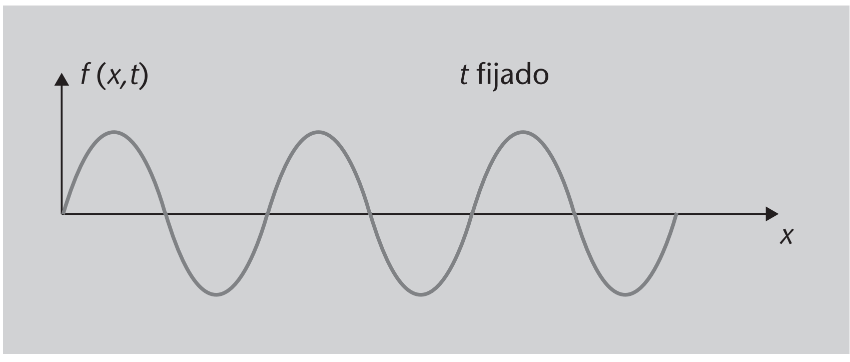


Figura 7

Fijaos en que el eje de abscisas es la posición x.

Ya veis que las figuras 6 y 7 son aparentemente iguales, si bien en el fondo son totalmente diferentes: una representa la evolución de la función en el tiempo y la otra, en el espacio. Puesto que es difícil representar funciones de muchas variables, suele hacerse de esta manera: se mantiene una variable fija y se representa cómo varía la otra. Por tanto, conviene prestar mucha atención a lo que se está representando.

En resumen, en las funciones de varias variables pueden variar todas simultáneamente y de forma independiente. Para simplificar la representación, podemos fijar todas las variables menos una.

Llegados a este punto, es hora de concretar un poco y ver bien cómo se propagan los campos electromagnéticos, es decir, cómo son las ondas electromagnéticas. Lo haremos en el siguiente subapartado.

1.8. Solución de la ecuación de onda

Hemos visto que las funciones que satisfacen la ecuación de onda (ecuación 53) deben ser funciones de varias variables como las vistas en el subapartado 1.7. Por tanto, si el campo eléctrico, $\vec{E}$ y el campo magnético, $\vec{B}$, deben satisfacer la ecuación 53, deberán depender tanto de la posición x como del tiempo t. Esto es, variarán tanto en el espacio como en el tiempo.

La pregunta que nos viene a la cabeza entonces es: muy bien, deben depender de la posición y del tiempo, ¿pero cómo tiene que ser esta dependencia? Es decir, ¿cómo deben de ser el campo eléctrico, $\vec{E}$, y el campo magnético, $\vec{B}$, que satisfagan las ecuaciones de onda (ecuaciones 51 y 52, respectivamente)? Para responder a esta pregunta os proponemos un ejercicio.

Ejercicio

Proponed una solución para la ecuación 53.

Solución

La solución a la ecuación de onda, la ecuación 53 es, precisamente, el mismo tipo de función que hemos comentado en el ejemplo del subapartado 1.5, ecuación 48. Ahora bien, como hemos mencionado, la función deberá depender tanto del tiempo, t, como del espacio, x, por lo cual deberán desaparecer ambas variables. Así pues, tanto el campo eléctrico como el campo magnético tendrán que ser funciones del tipo:

$$f(x,t) = A\cos(\omega t - kx) \tag{57}$$

que es precisamente el mismo tipo de función que la ecuación 54, que hemos utilizado en el subapartado 1.7 para mostraros la dependencia en varias variables. A, k y ω siguen siendo tres constantes cuyo significado, de momento, no nos preocupa.

Pero, ¿es realmente la expresión 57 solución de la ecuación 53? Para verlo, verificaremos que cumple la ecuación de onda, es decir, la vamos a sustituir en ambos miembros de la ecuación 53 y veremos que da lo mismo. ¡Hagámoslo!

Haremos cada derivada por separado. Comenzaremos por la derivada con respecto al tiempo:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -A\omega\,\mathrm{sen}(\omega t - kx) \tag{58}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = -A\omega^2\cos(\omega t - kx) \tag{59}$$

Recordad

$\frac{d}{dx}(\mathrm{sen}(g(x))) = \frac{dg(x)}{dx}\cos(g(x))$ y $\frac{d}{dx}(\cos(g(x))) = -\frac{dg(x)}{dx}\,\mathrm{sen}(g(x))$, donde $g(x)$ es una función que depende de x.

Ahora haremos las derivadas con respecto a la posición:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -Ak\,\mathrm{sen}(\omega t - kx) \tag{60}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -Ak^2\cos(\omega t - kx) \tag{61}$$

Con esto ya podemos sustituir las ecuaciones 59 y 61 en la ecuación 53:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \tag{62}$$

$$-A\omega^2\cos(\omega t - kx) = \frac{1}{c^2}(-Ak^2\cos(\omega t - kx)) \tag{63}$$

Si simplificamos, obtenemos:

$$\omega^2 = \frac{1}{c^2}k^2 \tag{64}$$

que, haciendo la raíz en ambos lados, queda:

$$\omega = \frac{1}{c}k \tag{65}$$

Fijaos en qué hemos obtenido: resulta que aquellas dos constantes que habíamos puesto casi como inventadas, ω y k, están, de hecho, relacionadas con la velocidad de la luz en el vacío, c:

$$c = \frac{k}{\omega} \tag{66}$$

Así pues, la ecuación 57 será la solución de la ecuación de onda, si se cumple la ecuación 66.

Por tanto, observad que sin haber dicho nada sobre qué son estas constantes, ya sabemos que:

- kx y ωt deben tener las mismas unidades, puesto que están sumadas;
- el cociente de k y ω, $\frac{k}{\omega}$, tiene unidades de velocidad, ya que es la velocidad de la luz en el vacío (ecuación 66).

Del ejemplo anterior, ya tenemos que la ecuación 57 es una solución para la ecuación de onda (ecuación 53). En nuestro caso, en lugar de $f(x,t)$ tendremos el campo eléctrico, $\vec{E}$, y el campo magnético, $\vec{B}$. Puesto que hasta ahora estamos trabajando en módulo, lo vamos a escribir, de momento, en forma de módulo; más adelante ya introduciremos el carácter vectorial.

Los campos eléctrico, E, y magnético, B, de la forma*:

$$E(x,t) = E_0 \cos(kx - \omega t) \tag{67}$$

$$B(x,t) = B_0 \cos(kx - \omega t) \tag{68}$$

satisfacen las respectivas ecuaciones de onda (expresiones 67 y 68):

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \tag{69}$$

$$\frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} \tag{70}$$

donde E_0, B_0, k y ω son constantes. En el caso de k y ω, cumplen la condición:

$$c = \frac{k}{\omega} \tag{71}$$

y c es la velocidad de la luz en el vacío.

*** Escribimos solo el módulo.**

Es importante tener presente que las ecuaciones 67 y 68 son solo una solución entre infinitas posibles. Os la hemos mostrado porque es el tipo de solución en que nos vamos a centrar. No obstante, como veréis en el siguiente apartado, ésta es una solución muy especial.

Sin embargo, todavía nos falta un paso para tener realmente la solución, ya que los campos eléctrico y magnético son vectores. De hecho, como hemos apuntado, las expresiones 67 y 68 son las soluciones en forma escalar. A continuación os mostraremos las expresiones en forma vectorial.

1.8.1. Carácter vectorial de las ondas electromagnéticas

En las ecuaciones 67 y 68 hemos escrito la expresión de los campos eléctrico y magnético, pero sin tener en cuenta su carácter vectorial. ¿Cómo aparecen los vectores en estas ecuaciones?

Observando la figura 8, ya veis que si la onda se propaga en la dirección x (es decir, en la dirección del vector unitario $\vec{i}$ o $\vec{u}_x$), el campo eléctrico va en la dirección y (es decir, en la dirección del vector unitario $\vec{j}$ o $\vec{u}_y$) y el campo magnético, en la dirección z (es decir, en la dirección del vector unitario $\vec{k}$ o $\vec{u}_z$). Por tanto, podemos escribir las ecuaciones 67 y 68 en forma vectorial simplemente poniendo la dirección en que va cada campo:

$$\vec{E}(x,t) = \vec{E}_0 \cos(kx - \omega t) = E_0 \cos(kx - \omega t)\vec{j} \tag{72}$$

$$\vec{B}(x,t) = \vec{B}_0 \cos(kx - \omega t) = B_0 \cos(kx - \omega t)\vec{k} \tag{73}$$

Figura 8. Representación de la onda completa de los campos eléctrico y magnético que se propagan en la dirección x

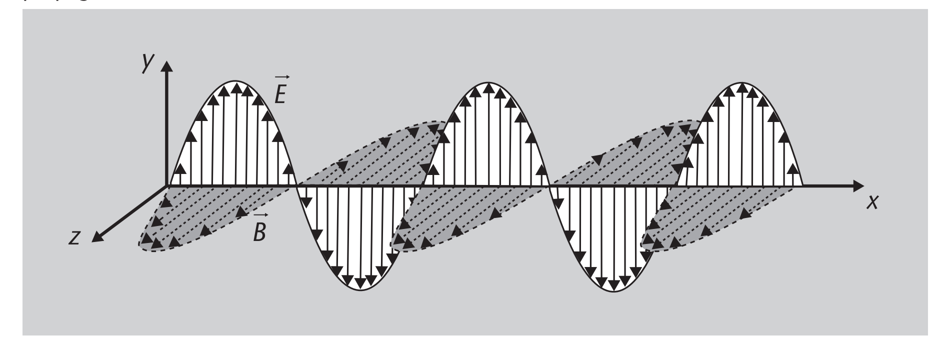


Figura 8

Tenéis representados los vectores campo eléctrico, $\vec{E}$, que van en la dirección del eje y y varían senoidalmente; y los vectores campo magnético, $\vec{B}$, que van en la dirección del eje z y también varían senoidalmente.

Ahora bien, ¿qué ocurre si la onda no va en la dirección del eje x? Tenéis la situación más general representada en la figura 9. En este caso, la onda se propaga en una dirección cualquiera $\vec{k}$ y la distancia al origen está expresada por un vector de posición $\vec{r}$. En la figura se representan también los ejes cartesianos.

Figura 9. Representación de la onda completa de los campos eléctrico y magnético que se propagan en una dirección cualquiera $\vec{k}$

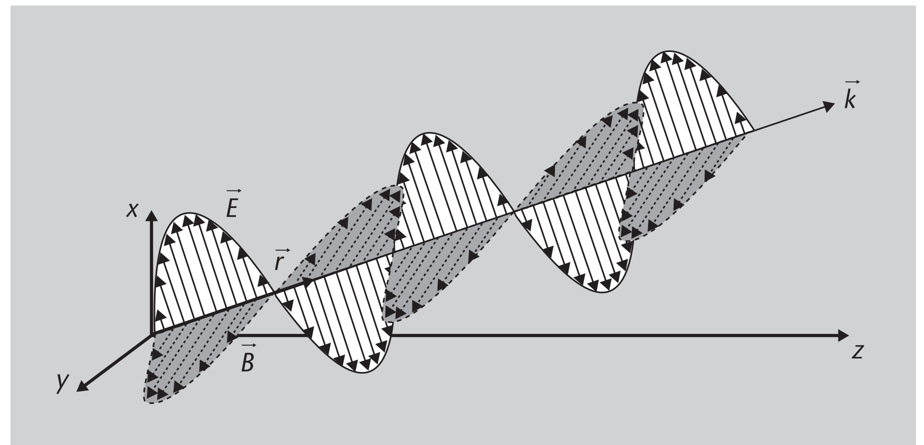


Figura 9

Tenéis representados los vectores campo eléctrico, $\vec{E}$, y magnético, $\vec{B}$, que son perpendiculares entre sí, y la dirección de propagación $\vec{k}$.

El vector $\vec{k}$ se denomina **vector de propagación** y su módulo corresponde a la k de las ecuaciones 72 y 73. En este caso, las expresiones de los campos eléctrico y magnético serán:

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \vec{E}_0 \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t) \tag{74}$$

$$\vec{B}(\vec{r},t) = \vec{B}_0 \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t) \tag{75}$$

Ahora bien, en la figura ya veis que $\vec{k}$ y $\vec{r}$ son vectores paralelos, y el producto escalar de dos vectores paralelos es directamente el producto de sus módulos:

$$\vec{k} \cdot \vec{r} = k \cdot r \cos 0 = k \cdot r \tag{76}$$

Por tanto, podemos expresar las ecuaciones 74 y 75 como:

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \vec{E}_0 \cos(k \cdot r - \omega t) \tag{77}$$

$$\vec{B}(\vec{r},t) = \vec{B}_0 \cos(k \cdot r - \omega t) \tag{78}$$

Estas ecuaciones, sin embargo, complican los cálculos y conceptualmente no aportan nada, por lo que en este módulo utilizaremos las ecuaciones 72 y 73. Además, en la figura 9 ya veis que lo único que necesitamos es girar los ejes de coordenadas para tener la situación de la figura 8.

También habríamos podido representar la onda con respecto al tiempo en lugar de hacerlo con respecto al espacio. En este caso nos encontraríamos en la situación representada en la figura 10. Fijaos que es igual que la figura 8, pero ahora en función del tiempo, en lugar de ser en función del espacio.

Actividad

¿Por qué la figura 10 y la figura 8 tienen la misma forma?

Figura 10. Representación de los campos eléctrico y magnético en función del tiempo

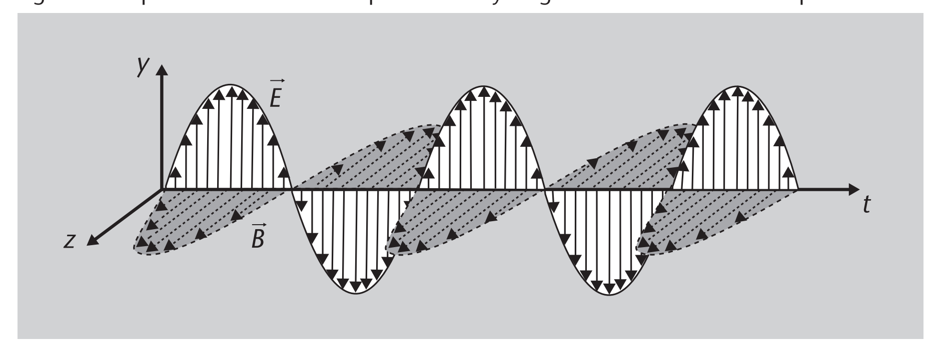


Figura 10

Representación de la onda completa de los campos eléctrico y magnético en función del tiempo t. Tenéis representados los vectores campo eléctrico, $\vec{E}$, que van en la dirección del eje y y varían senoidalmente; y los vectores campo magnético, $\vec{B}$, que van en la dirección del eje z y también varían senoidalmente.

Ahora que ya tenemos una solución para la ecuación de onda, ha llegado la hora de pasar a explicar las ondas electromagnéticas en sí y ver si el nombre de *ecuación de onda* y las soluciones que hemos encontrado (ecuaciones 72 y 73) son realmente adecuados. Lo veremos en el siguiente apartado, en el que explicaremos qué son las ondas y cómo se describen.

1.9. Qué hemos aprendido

En este apartado:

- Habéis visto cuáles son las ecuaciones de Maxwell.
- Habéis aprendido a mirar un conjunto de ecuaciones como un todo y a detectar asimetrías que pueden poner de manifiesto carencias de alguna ecuación.
- Habéis visto cómo completar la ley de Ampère con la corriente de desplazamiento.
- Habéis podido ver, a partir de las ecuaciones de Maxwell completas, que los campos eléctrico y magnético se pueden realimentar, es decir, generar mutuamente, con variaciones de flujo de uno y otro (en virtud de la ley de Faraday, ecuación 43, y de la ley de Ampère, ecuación 44).
- También os hemos explicado que estos campos cumplen la ecuación de onda, que se deriva de las ecuaciones de Maxwell y, a través de ella, os hemos hecho una breve introducción a las funciones de varias variables.
- Finalmente, habéis visto que una función de la forma:

$$\vec{F}(x,t) = \vec{F_0}\cos(kx - \omega t) \qquad (79)$$

puede ser solución de la ecuación de onda.

Básicamente lo que hemos hecho hasta aquí es buscar, a partir de primeros principios (es decir, de las ecuaciones de Maxwell) cómo podemos hacer que se propaguen los campos eléctrico y magnético. De esta manera hemos llegado a la ecuación de onda y a hallar una solución para ésta: la de la onda armónica. Por tanto, ya sabemos cómo se generan y cómo se propagan los campos.

Seguiremos adelante, precisamente, profundizando en la solución de la ecuación de onda. Describiremos qué es una onda y veremos que las soluciones que hemos hallado para la ecuación de onda son un tipo de onda.

2. Ondas electromagnéticas

En los módulos anteriores hemos visto cómo calcular los campos eléctrico y magnético a partir de, por ejemplo, una distribución de cargas o una corriente. En el apartado 1 hemos visto cómo se propagan estos campos y nos hemos quedado en el punto en que hemos comprobado que cumplen la ecuación de onda. Llegados a este punto, podemos decir que hemos hallado los principios que hacen que los campos eléctrico y magnético se puedan generar y realimentar mutuamente. También hemos visto que cumplen la ecuación de onda y hemos hallado una posible solución.

Ahora que ya hemos visto cómo se produce esta solución, nos vamos a centrar en su carácter ondulatorio. Para comenzar, vamos a ver qué es una onda y qué tipos de onda hay. Esto nos permitirá ver de qué tipo son las ondas electromagnéticas. A continuación, os vamos a mostrar con qué parámetros describimos la onda, y seguidamente veréis que, en realidad, hemos estado trabajando todo el tiempo con unas ondas muy especiales: las ondas armónicas, planas y monocromáticas. Finalmente, os vamos a presentar el espectro electromagnético que nos permitirá ver que la luz y las ondas de radio están más cerca de lo que pueda parecer *a priori*.

¿Qué aprenderemos?

En este apartado aprenderéis:

- Qué es una onda y qué tipos de onda hay. De hecho, veréis que las ondas electromagnéticas son ondas transversales no mecánicas.
- Cuáles son los parámetros que permiten describir las ondas.
- Qué son las ondas armónicas, planas y monocromáticas, que son de hecho las que vamos a estudiar en este módulo.
- Qué es el espectro electromagnético y a qué corresponde.

¿Qué supondremos?

Supondremos que habéis asimilado los conocimientos de los módulos "Electrostática" y "Magnetostática e inducción electromagnética", además de los conocimientos del apartado 1. En lo concerniente al aspecto matemático, solo supondremos, para seguir este apartado, que:

- Sabéis representar una función trigonométrica como el seno o el coseno.

2.1. ¿Qué es una onda?

Todavía nos quedan muchas preguntas por responder. Quizás una de las que primero surge es que hemos dicho que la ecuación 53 se denominaba *ecuación de onda* pero, ¿por qué este nombre? ¿qué es una onda? y, quizás lo más importante de todo, ¿cómo encaja todo esto en un módulo de electromagnetismo?

Para responder a todas estas preguntas, básicamente debemos responder a una: ¿qué es una onda? En este subapartado intentaremos daros una idea de lo que es una onda. Comenzaremos con un primer intento de definición que pone de manifiesto uno de los aspectos más relevantes de este tipo de fenómeno.

Una onda o, mejor dicho, un movimiento ondulatorio, es un tipo de movimiento que transporta energía y momento lineal pero no transporta materia.

En el módulo "Mecánica. Cinemática y dinámica" se explica qué son la energía y el momento lineal.

El ejemplo típico serían las oscilaciones que se forman al lanzar una piedra al centro de un estanque. Podéis ver un ejemplo en la figura 11. Esta sería la manera de crear las ondas. Ahora bien, imaginad que en el estanque hubiera un corcho o un objeto que se os hubiera caído y que quisierais hacerlo llegar a la orilla. Quizás alguna vez habéis intentado acercarlo golpeando el agua con un palo y creando ondas como las de la figura 11. Si lo habéis hecho, habréis visto que las ondas avanzan hacia la orilla; cuando las oscilaciones llegan al corcho, vemos que este comienza a oscilar arriba y abajo, pero... ¡no avanza! Esta oscilación es lo que se conoce como **onda** y el hecho de que la onda en sí avance (vaya hacia la orilla) pero no haga avanzar el corcho es lo que significa lo que hemos apuntado antes, "que transporta energía, pero no materia".

Direcciones web

En la dirección http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Spherical_wave2.gif podéis ver una animación en la que se representa un movimiento de ondas desde el centro hacia el margen. También podéis ver una animación en la que se muestra un objeto oscilante a causa de una onda en: http://es.wikipedia.org/wiki/Archivo:Simple_harmonic_motion_animation.gif.

Figura 11. Ondas circulares



Figura 11

Visión desde arriba de las ondas que se crearían en un estanque de agua. Fijaos en la oscilación.

Retened las siguientes tres ideas en relación con las ondas:

- Se desplazan.
- Transportan energía y momento lineal, pero no materia.

- Hay una oscilación: “algo” se mueve arriba y abajo. En el caso del agua, este “algo” es la propia agua.

Por otro lado, las ondas se pueden clasificar de diversas formas:

- Según el sentido de vibración tenemos:

– **Ondas transversales**: la vibración es perpendicular a la dirección de propagación. Este sería el caso del estanque y el corcho. El ejemplo de la figura 11, la onda en el agua, es, de hecho, un ejemplo de onda transversal, ya que la onda se desplaza en dirección paralela a la superficie del agua, pero oscila arriba y abajo, es decir, en dirección perpendicular a la superficie del agua. En la figura 12 tenéis una representación esquemática, en donde las flechas indican la dirección de vibración. Otro ejemplo de ondas transversales son las ondas electromagnéticas, que son las que nos interesan en este módulo.

Figura 12. Oscilación transversal

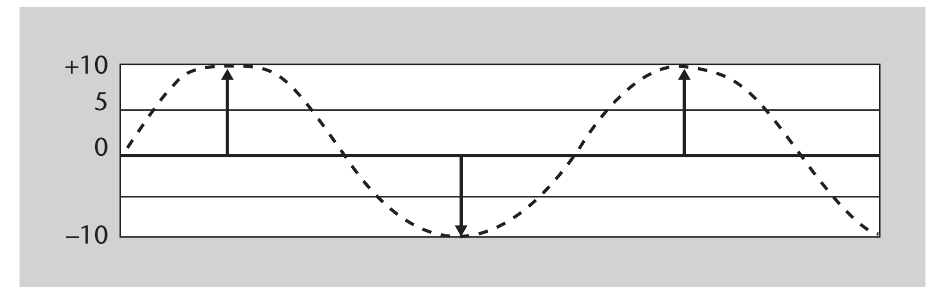


Figura 12

El eje horizontal indica la dirección de propagación y las flechas indican la dirección y el sentido de la oscilación.

– **Ondas longitudinales**: la vibración es en la misma dirección que la dirección de propagación. Sería el caso de las ondas sonoras, pero en este módulo no nos preocuparemos de este tipo de ondas. En la figura 13 tenéis representada una onda longitudinal. Las zonas más oscuras corresponden a los máximos de la vibración, y las zonas más claras a los “valles”. Para que veáis más claramente qué queremos decir con “máximos” y “valles”, la figura incorpora también una representación gráfica de la forma de una onda senoidal. De hecho, los términos equivalentes serían “cresta” y “valle” o “máximo” y “mínimo”.

Figura 13. Oscilación longitudinal

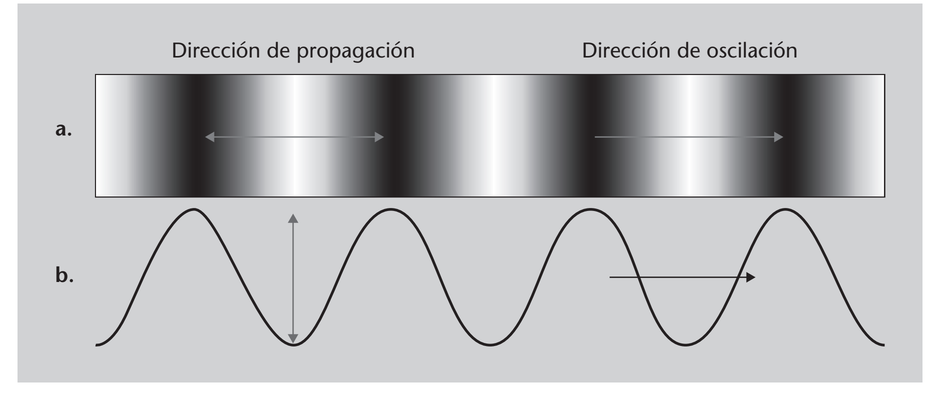


Figura 13

Onda longitudinal. Los máximos son los puntos más oscuros. La onda se produce por la oscilación hacia adelante y hacia atrás del material por el que se propaga la onda. Debajo tenéis la representación gráfica en forma de onda senoidal.

– **Ondas mixtas**: son una mezcla de los dos tipos anteriores.

- En función de si necesitan un medio material para propagarse, tenemos:

– **Ondas mecánicas**: lo que oscila es un medio material, como en el caso del agua del estanque (figura 11). Por tanto, son ondas que necesitan un medio material para propagarse.

– **Ondas no mecánicas**: no necesitan ningún medio material para propagarse. Correspondería a las ondas electromagnéticas, que son precisamente las que nos interesan en este módulo.

Así pues, en lo concerniente a las ondas electromagnéticas, que son las que nos interesan en este módulo, tenemos que:

- Son ondas no mecánicas porque no necesitan ningún medio para propagarse: hemos trabajado todo el tiempo con μ_0 y ϵ_0, que son, respectivamente, la permeabilidad y la permitividad del vacío.
- Son ondas transversales, ya que se puede demostrar, a partir de las ecuaciones de Maxwell (ecuaciones 41 a 44), que:

– el campo eléctrico y el campo magnético son perpendiculares entre sí,
– los dos campos son perpendiculares a la dirección de propagación.

Tenéis la situación representada en la figura 14. Fijaos en que, dado que tanto un campo como el otro son perpendiculares a la dirección de propagación, que en la figura es *x*, estamos hablando de ondas transversales.

Figura 14. Campos eléctrico, magnético y dirección de propagación

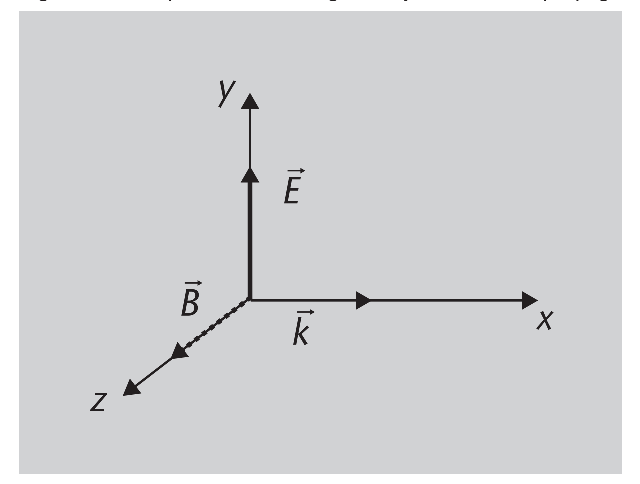


Figura 14

Representación de los campos eléctrico, $\vec{E}$, y magnético, $\vec{B}$, en la dirección de propagación, $\vec{k}$. Fijaos en que los tres son perpendiculares entre sí y en que el campo $\vec{B}$ va en la dirección del producto vectorial $\vec{k} \times \vec{E}$.

Si lo juntamos todo tenemos que los campos eléctrico y magnético (el campo electromagnético) se propagan conjuntamente en forma de onda. Estas ondas son las ondas electromagnéticas, que son ondas transversales y no mecánicas.

Ahora que ya tenemos una idea de qué son las ondas, el siguiente paso es describirlas matemáticamente. En general, esto va a ser bastante complicado, pero hay un caso en que es relativamente sencillo, que corresponde a una onda del tipo que aparece en la ecuación 54. Lo hacemos a continuación.

2.2. Descripción de una onda

En el subapartado anterior nos hemos quedado en el punto en que habíamos visto que los campos electromagnéticos se propagan en forma de ondas electromagnéticas. Estas se pueden describir mediante una función del tipo de la ecuación 54:

$$f(x,t) = A\cos(kx - \omega t) \tag{80}$$

De hecho, cuando una onda se puede describir con este tipo de función, se denomina *onda armónica*.

Más concretamente, para el campo electromagnético, las ecuaciones 77 y 78 que habéis visto en el subapartado 1.8.1 son:

$$\vec{E}(r,t) = \vec{E}_0\cos(kr - \omega t) \tag{81}$$

$$\vec{B}(r,t) = \vec{B}_0\cos(kr - \omega t) \tag{82}$$

En el caso de la situación de la figura 8, las podemos expresar con las ecuaciones 72 y 73. Si bien este tipo de ondas es solo uno de los posibles tipos que podemos encontrar, las ondas descritas de esta manera son muy útiles para explicar los diversos parámetros que utilizamos para describirlas:

- La amplitud, representada por la letra A en la ecuación 80, y por $\vec{E}_0$ y $\vec{B}_0$ en las ecuaciones 67 y 68.
- La longitud de onda, λ.
- El número de onda, que se representa con el símbolo k.
- La frecuencia angular, ω.

λ es la letra griega lambda minúscula y se lee "lambda"; ω es la letra griega omega minúscula y se lee "omega".

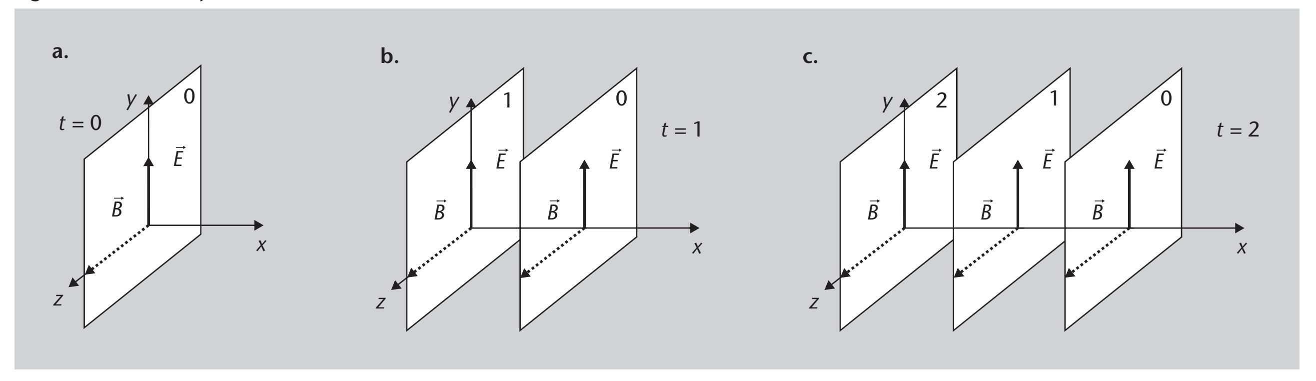
Ya veis, por tanto, que las constantes A, k y ω, que hemos ido arrastrando a lo largo de todo el módulo, tienen un cierto significado, que aclararemos en este subapartado. Algunos de estos parámetros ya los visteis en el módulo "Mecánica. Cinemática y dinámica", al hablar de oscilaciones, pero conviene repasarlos.

No obstante, hay otro concepto importante para describir la onda: es el concepto de *frente de onda*. Vamos a comenzar por éste y, a continuación, pasaremos a describir sus diversos parámetros.

2.2.1. El frente de onda

A lo largo de todo el módulo habéis visto que los campos eléctrico y magnético se pueden propagar en forma de ondas. Por tanto, lo que debe ocurrir es que una onda "viaje". Y eso es precisamente lo que ocurre: la onda se desplaza a una cierta velocidad y, entonces, es como si los campos eléctrico y magnético fueran avanzando. En la figura 15 tenéis representada gráficamente esta idea.

Figura 15. Onda viajera



En la figura tenéis representados los máximos de la onda en instantes diferentes, pero comenzando a contar a partir del instante en que se generan. En la figura 15a tenéis la situación en el instante en que se genera el campo electromagnético (el campo eléctrico $\vec{E}$ y el magnético $\vec{B}$) y tenéis representado también el plano en que se encuentran, que podemos denominar *plano 0*. Como veis, hemos representado la situación en que un campo vibra en el eje y (el campo eléctrico) y el otro, en el eje z (el campo magnético). Tras cierto tiempo (figura 15b), que consideramos como el instante $t = 1$ (las unidades son arbitrarias), este plano se ha desplazado una cierta distancia y ha aparecido otro máximo: es el segundo plano que veis aparecer, que denominamos *plano 1*. Fijaos en que el plano 0 está ahora un poco más adelantado. En la figura 15c tenéis un tercer instante ($t = 2$) en que la onda ha avanzado otro trecho.

Figura 15

Representación de cómo viaja una onda.
a. Instante $t = 0$, cuando se crea la onda;
b. Instante $t = 1$. Fijaos en que los campos creados en $t = 0$ han avanzado y los nuevos se sitúan detrás;
c. Un tercer instante, $t = 2$. Podéis ver cómo los campos creados en los instantes anteriores han seguido avanzando.

Dirección web

Podéis ver una onda viajando en la animación disponible en: http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Blender3D_CircularWaveAnim.gif

Fijaos en que el campo electromagnético "viaja". A efectos prácticos podemos decir que lo que transportan estas ondas es la energía electromagnética.

Estos planos que hemos dibujado en la figura 15 tienen un nombre, son los frentes de onda.

> Los **frentes de onda** son líneas o superficies (como en el ejemplo de la figura 15) correspondientes a un determinado estado de oscilación (en el caso de las ondas electromagnéticas de los campos $\vec{E}$ y $\vec{B}$) que se propagan en el espacio a medida que pasa el tiempo. Los frentes de onda nunca pueden cruzarse entre sí.

Por otro lado, hay otra característica de los frentes de onda que hemos dibujado en la figura 15: son paralelos y siempre perpendiculares a la dirección de propagación.

2.2.2. La longitud de onda λ y el número de onda *k*

La **longitud de onda** se define como la distancia entre dos puntos que están en el mismo estado de vibración. Su unidad de medida en el Sistema Internacional es el metro (m).

Tenéis la situación representada en la figura 16. Fijaos en que es la figura 8, es decir, la onda con respecto al espacio, pero representamos solo el campo eléctrico, para simplificar la figura. En ella podéis ver que la longitud de onda es el intervalo entre dos puntos cualesquiera que estén en el mismo estado de vibración (no necesariamente un máximo o un mínimo).

Recordad que SI es la sigla del Sistema Internacional de Unidades.

Figura 16. Longitud de onda

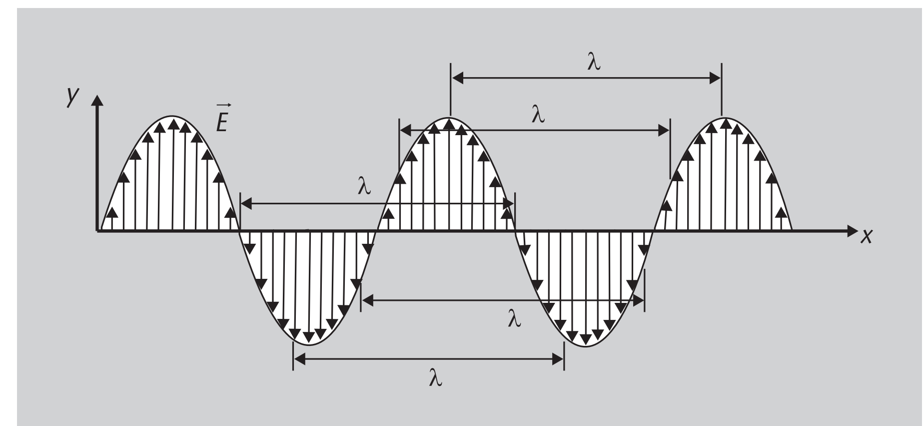


Figura 16

Representación de la onda completa de los campos eléctricos en la dirección de propagación. En ella se señala a qué corresponde la longitud de onda. Fijaos en que es la distancia entre dos puntos que están en el mismo estado de vibración, sea cual sea este estado.

A partir de esta longitud se define otro concepto, el número de onda:

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \qquad (83)$$

Como tenemos la longitud de onda en el divisor, las unidades serán m^{-1}.

Para entender qué significa el número de onda conviene pensar un poco en las funciones trigonométricas. Si tenéis el $\cos(\alpha)$, cuando sumamos 2π a α, volvemos a tener el mismo valor: $\cos(\alpha + 2\pi) = \cos(\alpha)$, es decir, el coseno es una función periódica de período 2π y, por tanto, también será periódico el campo eléctrico. Para verlo, podéis escribir la expresión del campo eléctrico (ecuación 72) cuando $x = 0$:

Dirección web

Podéis ver una animación en que se muestra la longitud de onda en: http://commons.wikimedia.org/wiki/File:1D_Progressive_Wave.gif

$$\vec{E}(x,t) = E_0 \cos(kx - \omega t)\vec{j} \qquad (84)$$

$$\vec{E}(0,t) = E_0 \cos(-\omega t)\vec{j} \qquad (85)$$

Y ahora fijaos en lo que ocurre cuando $x = \lambda$:

$$\vec{E}(x,t) = E_0 \cos(kx - \omega t)\vec{j} \tag{86}$$

$$\vec{E}(\lambda,t) = E_0 \cos(k\lambda - \omega t)\vec{j} \tag{87}$$

$$\vec{E}(\lambda,t) = E_0 \cos(\frac{2\pi}{\lambda}\lambda - \omega t)\vec{j} \tag{88}$$

$$\vec{E}(\lambda,t) = E_0 \cos(2\pi - \omega t)\vec{j} \tag{89}$$

Vemos, por tanto que, como la función coseno tiene período 2π, los resultados de las ecuaciones 85 y 89 son iguales.

Entonces, si os fijáis, lo que indica el número de onda (ecuación 83) es cuántas longitudes de onda, λ, hay en un ciclo completo, es decir, cuando la onda ha recorrido una distancia de 2π. O, dicho en otras palabras, "cuántas ondas" hay en un ciclo, que es lo que da lugar a su nombre, *número de onda*.

El **número de onda** se define como el número de oscilaciones que hace la onda en un ciclo completo. Se puede calcular a partir de la longitud de onda λ mediante la ecuación:

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \tag{90}$$

La unidad de medida en el SI es la inversa del metro, el metro elevado a menos uno (m^{-1}).

Ejemplo

Calculad el número de onda de una onda electromagnética de longitud de onda igual a 580 nm, que corresponde al color amarillo.

Solución

Para hacerlo, solo debemos sustituir los valores en la ecuación 90. Para evitar problemas, pasaremos primero las unidades a m:

$$580 \text{ nm} = 580 \text{ nm} \frac{1 \text{ m}}{10^9 \text{ nm}} = 5{,}8 \cdot 10^{-7} \text{ m} \tag{91}$$

Recordad que 1 nm = 10^{-9} m.

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{5{,}8 \cdot 10^{-7}} \tag{92}$$

$$k = 1{,}083 \cdot 10^7 \text{ m}^{-1} \tag{93}$$

2.2.3. La frecuencia angular ω y el período T

Ahora vamos a ver qué es la frecuencia angular, que hemos simbolizado con ω. Para hacerlo, no partiremos directamente de esta frecuencia, sino que haremos un recorrido algo diferente.

Dirección web

Podéis ver el concepto de frecuencia de una onda en la animación disponible en: http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Wave_frequency.gif.

Comenzaremos por una ecuación que habéis estudiado de sobras: la ecuación del movimiento rectilíneo y uniforme. Una onda electromagnética que se desplaza en el vacío es, de hecho, un elemento que se mueve a velocidad constante, c. Por tanto, podemos aplicarle esta ecuación.

La ecuación del movimiento rectilíneo y uniforme se estudia en el módulo "Mecánica. Cinemática y dinámica".

$$\text{espacio} = \text{velocidad} \cdot \text{tiempo} \quad (94)$$

Ahora imaginad que queremos calcular el tiempo, T, que tarda la onda en recorrer el espacio correspondiente a una longitud de onda. Para hacerlo, solo deberemos sustituir el espacio por λ y la velocidad por c:

λ es la letra griega lambda minúscula y se lee "lambda"; ω es la letra griega omega minúscula y se lee "omega".

$$T = \frac{\lambda}{c} \quad (95)$$

Este tiempo se denomina *período*.

El **período** es el tiempo que tarda la onda en completar una oscilación. Su unidad de medida en el SI es el segundo (s).

Recordad que *SI* es la sigla de *Sistema Internacional de Unidades*.

Y ahora nos podemos plantear la misma pregunta que nos habíamos hecho para calcular el número de onda en el subapartado 2.2.2: ¿cuántas oscilaciones hace la onda en un ciclo completo? Si recordáis que un ciclo son 2π y que T es el tiempo que tarda en hacer una oscilación, el número de oscilaciones que hará la onda en un período es $\frac{2\pi}{T}$. A este valor se le denomina *frecuencia angular* y se representa con la letra ω, que es la misma ω que hemos ido viendo a lo largo de todo el módulo:

Dirección web

Podéis ver una animación que muestra el período en: http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Wave_period.gif.

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \quad (96)$$

La **frecuencia angular**, ω, indica el número de oscilaciones que ha hecho una onda en un ciclo completo. Su unidad de medida en el SI es el radián por segundo (rad/s) o, simplemente, la inversa del segundo, el segundo elevado a menos uno (s^{-1}).

No obstante, hay otro parámetro que se usa, la frecuencia, f, que indica cuánto tarda la onda en completar una única oscilación. Se calcula como la inversa del período (que, recordad, es el tiempo que tarda en completar una oscilación):

$$f = \frac{1}{T} \quad (97)$$

La **frecuencia** es el tiempo que tarda la onda en completar una única oscilación. Su unidad de medida en el SI es el segundo elevado a menos uno (s^{-1}), que recibe el nombre de hercio y se representa con el símbolo Hz.

Notación

En este módulo simbolizamos la frecuencia con la letra f. Sin embargo, en muchos textos encontraréis que también se utiliza la letra griega nu minúscula, ν.

Heinrich Rudolf Hertz

Físico alemán (Hamburgo, Alemania, 1857 – Bonn, 1894) conocido principalmente por haber demostrado la existencia de las ondas electromagnéticas. La unidad de frecuencia recibe el nombre de hercio (Hz) en su honor.

Tenéis la situación representada en la figura 17. Fijaos en que es la figura 10, es decir, una representación con respecto al tiempo, pero hemos representado solo el campo eléctrico para simplificar la figura. En ella podéis ver que el período es el intervalo entre dos puntos cualesquiera que estén en el mismo estado de vibración (no necesariamente un máximo o un mínimo).

Figura 17. Período

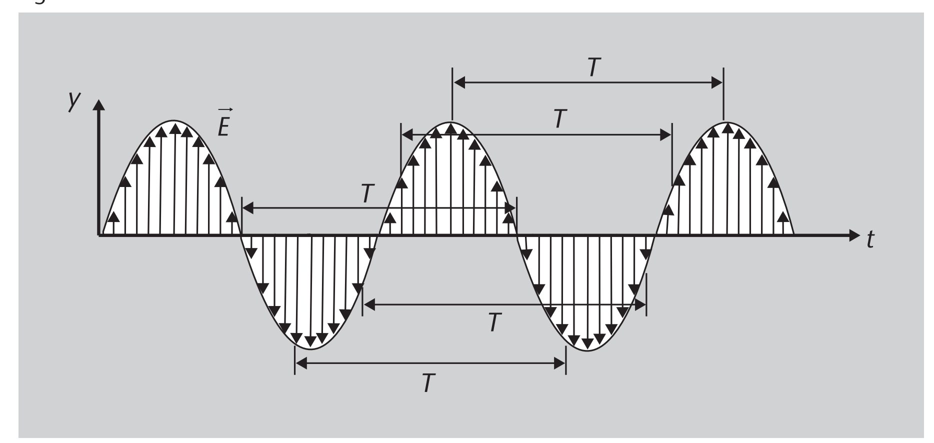


Figura 17

Representación de la onda de campo eléctrico en función del tiempo. Se señala a qué corresponde un período. Fijaos en que es el tiempo que tarda la onda en volver a estar en el mismo estado de vibración, sea cual sea este estado.

Fijaos en que, en realidad, tanto la frecuencia angular como la frecuencia se miden en s^{-1}, pero solo hemos hablado de hercios en el caso de la frecuencia. El motivo es que, aunque el hercio se defina como un s^{-1}, solo se utiliza cuando hablamos de frecuencia, ya que en el caso de la frecuencia angular, las unidades no son en realidad s^{-1}, si no rad/s.

Cabe decir también que si comparamos las ecuaciones 96 y 97, vemos que ambas frecuencias están relacionadas de la siguiente manera:

$$\omega = 2\pi f \quad (98)$$

También podéis encontrar una relación parecida entre la longitud de onda y la frecuencia, como veréis en el siguiente ejercicio.

Ejercicio

Hallad la relación entre la longitud de onda y la frecuencia.

Solución

Para hallar la relación entre la longitud de onda y la frecuencia, combinaremos las ecuaciones 95 y 97:

$$T = \frac{\lambda}{c} \quad (99)$$

$$f = \frac{1}{T} \quad (100)$$

Si sustituimos la primera ecuación en la segunda tenemos:

$$f = \frac{c}{\lambda} \quad (101)$$

Fijaos en que la frecuencia es, por tanto, inversamente proporcional a la longitud de onda. Así, cuanto mayor sea la frecuencia, menor será la longitud de onda.

Ejemplo

El color amarillo tiene una longitud de onda de 580 nm. Si una onda de color amarillo se desplaza por el vacío, calculad el número de onda, la frecuencia, la frecuencia angular y el período de la misma.

Solución

Para hacer los cálculos comenzaremos pasando las unidades de la longitud de onda a metros:

$$580 \text{ nm} = 580 \frac{10^{-9} \text{ nm}}{1 \text{ m}} = 5{,}8 \cdot 10^{-7} \text{ m} \quad (102)$$

Recordad que 1 nm son 10^{-9} m.

Y ahora vamos a ir calculando el resto de los parámetros:

- Número de onda. Lo podemos obtener con la ecuación 90:

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = 1{,}08 \cdot 10^{7} \text{ m}^{-1} \quad (103)$$

- Frecuencia. La podemos obtener con la ecuación 101:

$$f = \frac{c}{\lambda} = 5{,}2 \cdot 10^{14} \text{ Hz} = 516{,}9 \text{ THz} \quad (104)$$

Recordad que la velocidad de la luz en el vacío es: $c = 2{,}9979 \cdot 10^{8}$ m/s.

- Frecuencia angular. La podemos obtener a partir del resultado obtenido en la ecuación 104 y utilizando la ecuación 98:

$$\omega = 2\pi f = 3{,}2 \cdot 10^{15} \text{ s}^{-1} = 3.247{,}6 \text{ Ts}^{-1} \quad (105)$$

Recordad que el prefijo tera (T) son 10^{12}. Por tanto, 1 THz son 10^{12} Hz.

- Período. Lo podemos obtener a partir del resultado obtenido en la ecuación 104 y utilizando la ecuación 97:

$$T = \frac{1}{f} = 1{,}9 \cdot 10^{-15} \text{ s} = 1{,}9 \text{ fs} \quad (106)$$

Recordad que el prefijo *femto-* (f) representa 10^{-15}. Por tanto, 1 fs son 10^{-15} s.

2.2.4. La amplitud $\vec{E}_0$ y $\vec{B}_0$

Nos queda todavía un parámetro por definir, la A de la ecuación 80, que hemos simbolizado por $\vec{E}_0$ en la ecuación 81, y por $\vec{B}_0$ en la ecuación 82. De hecho, tenéis representado este valor en la figura 18. Este parámetro se denomina *amplitud*. Fijaos en que es el parámetro que indica el valor máximo de la vibración y la dirección en que esta vibración se produce y, por ello, se representa vectorialmente.

La **amplitud**, $\vec{E}_0$ en el caso del campo eléctrico y $\vec{B}_0$ en el caso del campo magnético, representa la máxima separación con respecto a la posición de equilibrio, tanto de la onda del campo eléctrico como de la del campo magnético. La unidad de medida en el SI es la unidad de la onda que se propague; así, serían N/C en el caso del campo eléctrico y T en el caso del campo magnético.

Recordad que *SI* es la sigla de *Sistema Internacional de Unidades.*

Cuando definimos la amplitud, hablamos de separación máxima. Por tanto, es siempre positiva, ya que en realidad hablamos del módulo. Fijaos, sin embargo, en que el vector que la representa apunta hacia arriba o hacia abajo según el sentido en que la onda esté oscilando en ese instante, como podéis ver en la figura 18. Así, según el sistema de referencia de esta figura, $\vec{E}_0$ será $+E_0\vec{j}$ cuando apunta hacia arriba y $-E_0\vec{j}$ cuando apunta hacia abajo.

Figura 18. Amplitud

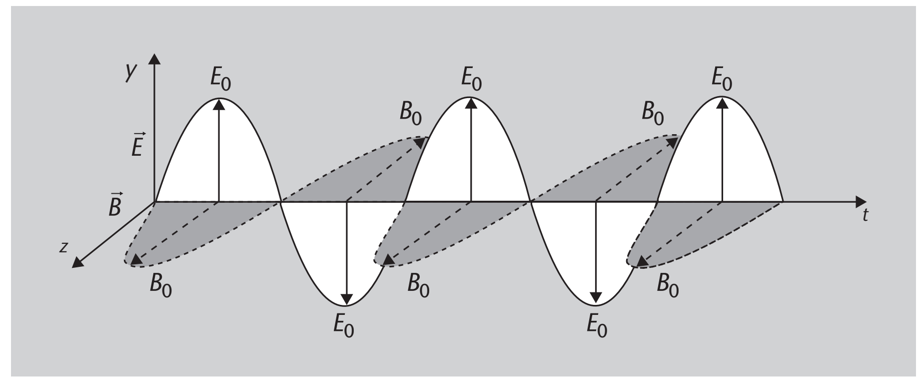


Figura 18

Representación de una onda electromagnética. E_0 y B_0 indican la amplitud de los campos eléctrico y magnético, respectivamente. Fijaos en que es la distancia máxima al estado de equilibrio.

2.2.5. La fase

En las ecuaciones que hemos ido viendo a lo largo del módulo, del estilo de la ecuación 80, como serían las ecuaciones 81 y 82, hay otro elemento presente en todos los casos: $kx-\omega t$, es decir, lo que hay dentro del coseno. Este término tiene un nombre propio: se denomina *fase*.

La **fase** es el argumento del coseno (o el seno) en la función que describe la onda.

Cabe decir que en todo el módulo hemos obviado un elemento, la fase inicial, que podríamos simbolizar por ϕ_0. La fase inicial permite tener en cuenta el estado de la oscilación en el instante y la posición iniciales.

La fase inicial

En la figura 8 tenéis las ondas correspondientes a los campos eléctrico y magnético, pero fijaos en un detalle: las dos ondas comienzan en el punto que hemos tomado como origen de coordenadas. ¿Qué pasaría, sin embargo, si en este instante las ondas tuvieran un cierto valor en lugar de ser cero? Tendríamos lo que conocemos como una fase inicial (ved la figura 19).

Figura 19. Fase

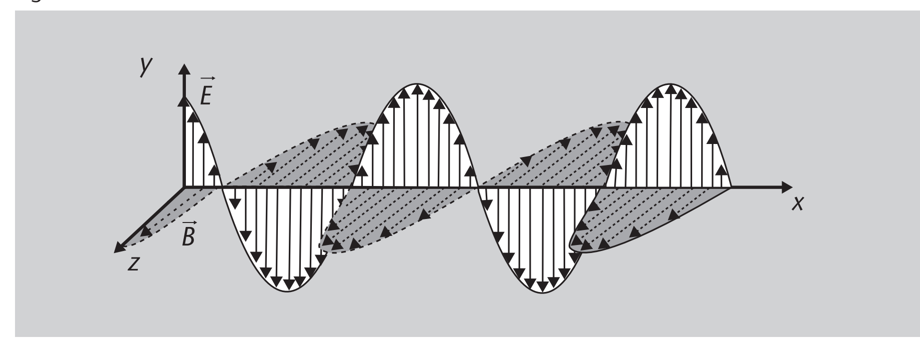


Figura 19

Representación de los campos eléctrico y magnético en la dirección de propagación y con una cierta fase inicial.

En este caso, las ecuaciones 72 y 73 (que son como la 81 y la 82 con la situación de las figuras 8 o 19) quedarían, con una fase inicial ϕ_0, de la manera siguiente:

$$\vec{E}(x,t) = E_0 \cos(kx - \omega t + \phi_0)\vec{j} \tag{107}$$

$$\vec{B}(x,t) = B_0 \cos(kx - \omega t + \phi_0)\vec{k} \tag{108}$$

Observad que lo único que hemos tenido que hacer ha sido añadir esta fase inicial a la función trigonométrica, al coseno. Para ver que, efectivamente, es la fase inicial, solo tenéis que hacer $x = 0$ y $t = 0$:

$$\vec{E}(0,0) = E_0 \cos(\phi_0)\vec{j} \tag{109}$$

$$\vec{B}(0,0) = B_0 \cos(\phi_0)\vec{k} \tag{110}$$

En estas ecuaciones podéis ver por qué se llama fase inicial.

La **fase inicial** es la fase que tiene una onda en el instante y la posición iniciales, es decir, para $x = 0$ y $t = 0$.

En todo este módulo hemos considerado:

$$\phi_0 = 0 \quad (111)$$

Esto es, hemos supuesto todo el tiempo la situación de la figura 8 y es por ello que hasta ahora no ha aparecido la fase inicial. No obstante, debéis tener en cuenta que este término existe. Cabe decir, sin embargo, que cuando tenemos una única onda, este parámetro es irrelevante. Sí que tiene mucho sentido considerarlo cuando tenemos dos o más ondas que interaccionan entre sí, ya que entonces hallaremos situaciones diferentes según cuál sea, precisamente, la fase inicial de cada una.

2.2.6. Diversas formas de expresar los campos eléctrico y magnético

En este apartado hemos visto los parámetros que caracterizan una onda electromagnética: amplitud, frecuencia y longitud de onda. Con ellos hemos representado la onda con las expresiones 72 y 73 (que reproducimos aquí):

$$\vec{E}(x,t) = E_0 \cos(kx - \omega t)\vec{j} \quad (112)$$

$$\vec{B}(x,t) = B_0 \cos(kx - \omega t)\vec{k} \quad (113)$$

Estas ecuaciones son como la 81 y la 82, la situación de las figuras 8 o 19, con aquellos ejes, pero las utilizamos porque no se pierde generalidad. Si queréis, también podéis representarla en función de la longitud de onda mediante la ecuación 83: $k = \frac{2\pi}{\lambda}$.

$$\vec{E}(x,t) = E_0 \cos(\frac{2\pi}{\lambda}x - \omega t)\vec{j} \quad (114)$$

$$\vec{B}(x,t) = B_0 \cos(\frac{2\pi}{\lambda}x - \omega t)\vec{k} \quad (115)$$

Y si tenemos en cuenta la ecuación 98, $\omega = 2\pi f$, podemos escribir también:

$$\vec{E}(x,t) = E_0 \cos(\frac{2\pi}{\lambda}x - 2\pi ft)\vec{j} \quad (116)$$

$$\vec{B}(x,t) = B_0 \cos(\frac{2\pi}{\lambda}x - 2\pi ft)\vec{k} \quad (117)$$

Podríamos dejar así este resultado, pero lo cierto es que pide a gritos que se saque el factor común 2π, si bien no lleva a ningún lado:

$$\vec{E}(x,t) = E_0 \cos\left[2\pi(\frac{1}{\lambda}x - ft)\right]\vec{j} \quad (118)$$

$$\vec{B}(x,t) = B_0 \cos\left[2\pi(\frac{1}{\lambda}x - ft)\right]\vec{k} \quad (119)$$

que es otra manera de expresar la ecuación de las ondas; en función de la longitud de onda, λ, y de la frecuencia, f, en lugar de hacerlo en función del número de onda, k, y de la frecuencia angular, ω.

A continuación veremos cómo podemos identificar los diversos elementos de la ecuación de una onda.

Ejemplo

Tenemos una onda electromagnética cuyo campo eléctrico está expresado por:

$$\vec{E}(z,t) = 150\cos(5{,}0 \cdot 10^{-4}z - 1{,}5\pi \cdot 10^{6}t)\vec{i}\ \text{N/C} \tag{120}$$

Responded a las siguientes preguntas:

a) ¿En qué dirección oscila el campo eléctrico?
b) ¿En qué dirección se propaga la onda?
c) ¿Cuál es su amplitud?
d) ¿Cuál es su frecuencia angular?
e) ¿Cuál es su número de onda?

Solución

Para responder a todas las preguntas solo necesitamos comparar la ecuación 120 con la expresión 81.

Así, podemos responder directamente a las diversas cuestiones:

a) En este caso el campo oscila en la dirección $\vec{i}$ (podéis verlo por el vector unitario).
b) El campo se desplaza en la dirección z (podéis verlo porque z hace aquí la función que hacía x en la ecuación 112.
c) Su amplitud vale 150 N/C.
d) Su frecuencia angular vale $1{,}5\pi \cdot 10^{6}\ \text{s}^{-1}$.
e) Su número de onda vale $5{,}0 \cdot 10^{-4}\ \text{m}^{-1}$.

Ya veis, por tanto, que de la expresión de la onda extraemos gran parte de la información para describirla.

Ahora que ya tenemos la onda descrita, veamos por qué las ondas representadas por las ecuaciones 81 y 82 son tan especiales: son ondas armónicas, planas y monocromáticas.

Un último apunte antes de comenzar: recordad que podemos expresar una función exponencial en términos del seno y del coseno, es decir:

$$e^{j\alpha} = \cos\alpha + j\,\text{sen}\,\alpha \tag{121}$$

donde j es el número imaginario (recordad que en física y en ingeniería a menudo utilizamos j en lugar de i, para no confundirlo con la i que simboliza la corriente eléctrica) y α, la fase.

Por tanto, todo lo que diremos con respecto a las funciones trigonométricas es válido también para la exponencial compleja, ya que son dos maneras diferentes de representar lo mismo.

2.3. Ondas armónicas, planas y monocromáticas

Hemos dicho al principio del apartado que las ondas representadas por expresiones del tipo 80 (que correspondería al tipo de las ondas que describen los campos eléctrico y magnético, ecuaciones 81 y 82) son muy especiales.

El motivo de ello es que son lo que se conoce como *ondas armónicas, planas y monocromáticas*. Es decir, de los infinitos tipos de onda posibles, nos quedamos solo con éstas. De esta manera podemos resolver analíticamente numerosos cálculos que serían imposibles si escogiéramos casos más genéricos y además este tipo de ondas nos proporcionan una manera relativamente fácil de describirlas. Cabe decir también que, gracias al análisis de Fourier, estas ondas nos servirán para describir ondas mucho más complejas, pero esto ya queda más allá de los objetivos del módulo.

A continuación vamos a describir qué significa que una onda sea armónica, plana y monocromática. Y veréis también que hay una razón mucho más fundamental para trabajar con ellas.

2.3.1. Ondas armónicas

Dentro de las ondas hay un tipo de ondas muy importantes, que incluso tienen nombre propio: las ondas armónicas.

> Las **ondas armónicas** son las que tienen un comportamiento periódico que se puede describir con una función $f(x,t)$ senoidal o cosenoidal.

Observad que las ecuaciones 80, 81 y 82 cumplen esta condición, ya que son una función cosenoidal. Además, como habéis visto en el subapartado 2.2.3, son periódicas.

Para que os hagáis una idea de la importancia de las ondas armónicas, fijaos desde cuántos puntos de vista se nos ha aparecido una ecuación senoidal o cosenoidal:

El término *oscilación armónica* hace referencia a las oscilaciones que se ven en el módulo "Mecánica. Cinemática y dinámica" al tratar el movimiento armónico simple.

- Hemos partido de las ecuaciones de Maxwell y entonces hemos buscado un tipo de función que cumplieran los campos eléctrico y magnético, de manera que pudieran generarse mutuamente. Hemos encontrado entonces que una función del tipo seno o coseno lo permitía (ecuación 57).
- Hemos mostrado una ecuación a la que se llega desde las ecuaciones de Maxwell, la ecuación de onda (ecuación 53). Y, un vez más, hemos visto que el seno y el coseno son una solución de ésta (ecuaciones 72 y 73).
- Por otro lado, resulta que una función seno o coseno es también el tipo de función que describe un movimiento armónico simple.



El movimiento armónico simple se estudia en el módulo "Mecánica: cinemática y dinámica".

- Y ahora vemos que las ondas que se describen con una función seno o coseno se denominan *ondas armónicas*.

Ya veis que hemos llegado a soluciones del tipo de la ecuación 80 desde diversos puntos de vista. Esto justifica en cierto modo la importancia de las ondas armónicas. Ahora bien, hay tres elementos más que justifican su importancia:

- Como ya os avanzamos en el módulo "Mecánica. Cinemática y dinámica", y como efectivamente estáis viendo, los movimientos oscilatorios armónicos son muy importantes y están en todas partes. Ya veis que aparecieron para describir el movimiento de un muelle, y ahora los volvemos a encontrar al hablar de las ondas.
- Hay un teorema matemático, el teorema de Fourier, que permite descomponer cualquier función periódica como una suma (que puede ser una suma infinita) de funciones seno y coseno. No demostraremos aquí este teorema, pero ya veis que, gracias a él, tiene mucho sentido estudiar las funciones seno y coseno (las ondas armónicas), ya que cualquier función periódica se puede expresar como suma de éstas. Por tanto, si sabemos trabajar con las ondas armónicas, podemos trabajar con cualquier tipo de onda.
- Finalmente, pero no por ello menos importante, las funciones seno y coseno son relativamente fáciles de tratar matemáticamente.

Así, pues, hemos visto que las ondas de las ecuaciones 54, 67 y 68 son armónicas. Ahora vamos a ver que también son ondas planas.

2.3.2. Ondas planas

Si os fijáis en las tres subfiguras de la figura 15, resulta que en ambas tanto el campo eléctrico como el campo magnético están siempre en el mismo plano: que en el caso de la figura 15 es el plano yz. Además, los dos campos se propagan siempre en la misma dirección, que en el caso de la figura 15 es la dirección x. Cuando se da esta situación decimos que tenemos ondas planas.

Las **ondas planas** son las que cumplen que:

- se propagan siempre en la misma dirección;
- el frente de onda es perpendicular a la dirección de propagación, aunque esta condición también la cumplen las ondas circulares y las esféricas.



El frente de onda se trata en el subapartado 2.2.1.

Las ecuaciones 81 y 82 corresponden, pues, a ondas planas. De momento, a partir de lo que hemos visto en este subapartado y en el anterior, ya podemos afirmar que estamos trabajando con ondas armónicas planas.

2.3.3. Ondas monocromáticas

Para terminar, hay un tema que es importante tener presente. Si os fijáis en las ecuaciones que han salido en este módulo, como las ecuaciones 81 y 82, había solo una frecuencia angular. Es decir, cada onda tenía una única ω o, lo que es lo mismo (en virtud de la ecuación 101), una longitud de onda fija. Este tipo de ondas se denominan *ondas monocromáticas*.

Una **onda monocromática** es la que solo tiene una frecuencia.

Y os preguntaréis, ¿cómo puede tener una onda más de una frecuencia? Si recordáis el subapartado 2.3.1, cuando hemos mostrado cómo era la solución de la ecuación de onda, ya hemos dicho que gracias al teorema de Fourier, siempre podríamos expresar una onda como una suma de ondas del tipo de la ecuación 80. Es decir, cualquier onda se puede expresar como una suma de ondas monocromáticas o, dicho en otras palabras, las ondas pueden estar formadas por muchas ondas monocromáticas, cada una de una frecuencia diferente.

De todo lo que acabamos de explicar resulta que, sin haberlo dicho, en realidad nos habíamos centrado solo en ondas armónicas, planas y monocromáticas. Aunque esto os pueda parecer muy restrictivo, recordad nuevamente que, gracias al teorema de Fourier, podremos expresar siempre cualquier función periódica como una suma de varias (quizás infinitas) ondas de este tipo.

Monocromático

El término *monocromático* significa "de un solo color". Entenderéis el motivo de este nombre en el subapartado 2.4.

2.4. Clasificación de las ondas electromagnéticas

Hasta ahora hemos visto que los campos eléctrico y magnético cumplen las ecuaciones de Maxwell y que, a partir de estas ecuaciones, se puede demostrar que ambos campos se propagan conjuntamente en forma de ondas, sin necesidad de ningún medio, y que lo hacen a la velocidad de la luz, c. En este módulo nos hemos centrado en las ondas armónicas (subapartado 2.3.1), planas (subapartado 2.3.2) y monocromáticas (subapartado 2.3.3). Estamos trabajando, por tanto, con ondas que se pueden describir con una función senoidal o cosenoidal y que tienen una única frecuencia (o longitud de onda, véase el subapartado 2.2.3).

En resumen, llegados a este punto ya tenemos las ondas electromagnéticas y sabemos describirlas. No obstante, hay un punto que llama la atención: ¿no os parece muy curioso que la velocidad de propagación de las ondas electromagnéticas en el vacío coincida con la velocidad de la luz en el vacío? Efectivamente, sí que es curioso, y este fue uno de los hechos que llevó a darse cuenta de que lo que denominamos *luz* no es más que un conjunto de ondas electromagnéticas en un rango de frecuencias determinado.

Sin embargo, la luz no es el único rango de frecuencias con nombre propio. De hecho, si ordenamos las ondas electromagnéticas según su frecuencia (o, lo que es lo mismo, según su longitud de onda, como podéis ver en la ecuación 101), observamos que tienen nombres y propiedades diferentes según el rango de frecuencias en que se encuentren. En la tabla 1 tenéis cómo se clasifican las ondas electromagnéticas monocromáticas. Esta clasificación se conoce con el nombre de *espectro electromagnético*.



Podéis ver el concepto de *monocromaticidad* en el subapartado 2.2.3.

El **espectro electromagnético** es la distribución de las ondas electromagnéticas según su frecuencia o longitud de onda.

Así, tenemos, de menor a mayor frecuencia (o, si queréis, de mayor a menor longitud de onda):

Tabla 1. Espectro electromagnético

Denominación	Rango de frecuencias	Longitudes de onda
Rayos γ	>30 EHz	<10 pm
Rayos X	30 PHz - 30 EHz	10pm - 10 nm
Ultravioleta extremo	1,5 PHz - 30 PHz	10nm - 200 nm
Ultravioleta cercano	789 THz - 1,5 PHz	200 nm - 380 nm
Luz visible	384 THz - 789 THz	380 nm - 780 nm
Infrarrojo cercano	120 THz - 384 THz	780 nm - 2,5 μm
Infrarrojo medio	6 THz - 120 THz	2,5 μm - 50 μm
Infrarrojo lejano	300 GHz - 6 THz	50 μm - 1 mm
Microondas	1 GHz - 300 GHz	1 mm - 30 cm
Frecuencia ultraalta (TV, UHF)	300 MHz - 1 GHz	30 cm - 1 m
Frecuencia muy alta (TV, VHF)	30 MHz - 300 MHz	1 m - 10 m
Onda corta (radio, SW)	1,7 MHz - 30 MHz	10 m - 180 m
Onda media (radio, MW)	650 kHz - 1,7 MHz	180 m - 650 m
Onda larga (radio, LW)	30 kHz - 650 kHz	650 m - 10 km
Frecuencia muy baja (radio, VSF)	<30 kHz	>10 km

Un EHz, leído "exahercio", son 10^{18} Hz.

Un PHz, leído "petahercio", son 10^{15} Hz.

Un THz, leído "terahercio", son 10^{12} Hz.

Un GHz, leído "gigahercio", son 10^{9} Hz.

Un μm, leído "micrómetro", son 10^{-6} m.

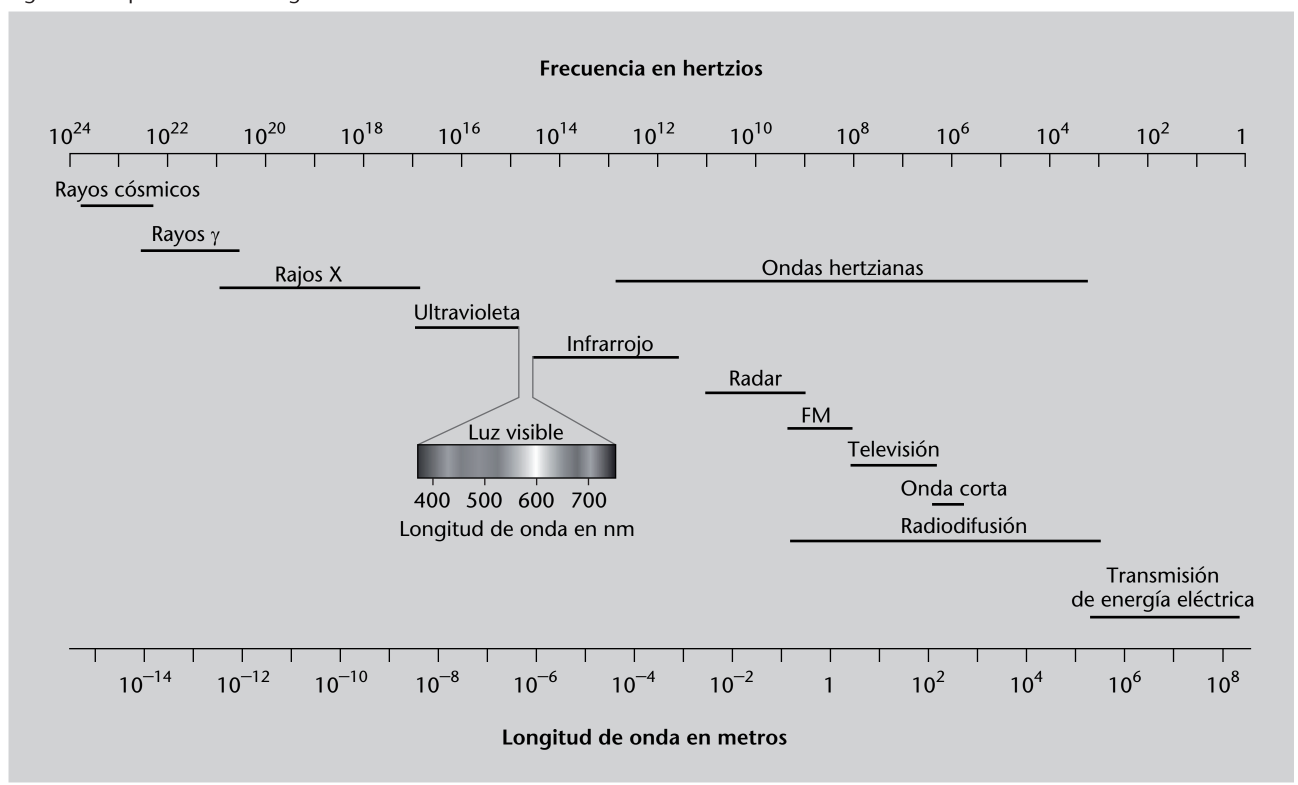
Un nm, leído "nanómetro", son 10^{-9} m.

Un pm, leído "picómetro", son 10^{-12} m.

No es preciso que memoricéis estos rangos, basta con que tengáis una idea de su orden de magnitud (saber que cuando hablamos de microondas hablamos de centenares de GHz, por ejemplo). Quizás sí que conviene saber, por su importancia, cuál es el rango de la luz visible, entre 380 nm y 780 nm. Cabe decir también que las fronteras no son tan marcadas como tenéis en la tabla 1, sino que hay una cierta superposición entre los diversos rangos. En la figura 20 se da una representación gráfica en que, por su importancia, se ha ampliado la zona correspondiente al visible (es decir, a la luz) y en ella podéis ver que, en efecto, se produce una superposición entre diversos rangos.

De toda esta clasificación lo que llama más la atención, sin duda, es que solo variando la frecuencia pasamos de tener ondas de radio a tener microondas o luz visible. También puede sorprender que precisamente la luz solo sea un fragmento de todo el espectro. Pero es un fragmento muy especial, ya que es el conjunto de ondas electromagnéticas que podemos ver sin ayuda de instrumentos, solo con nuestros ojos.

Figura 20. Espectro electromagnético



En este sentido, el rango correspondiente a la luz es el más objetivo: si no lo vemos, no es luz. El resto de la clasificación es puramente convencional y los límites se han establecido de la forma que nos interesa actualmente, teniendo presente la tecnología actual. Cabe decir que, especialmente en el rango de la radio y la televisión, estos límites están actualmente en discusión.

Otro elemento a tener presente es que cada rango es finito. Pensad por ejemplo en la banda del UHF (la de la televisión): el espacio que tiene asignado es finito. Esto significa que si una emisora emite en una determinada frecuencia, aquella frecuencia ya está ocupada y nadie más podrá emitir en ella. Es por ello que el espectro electromagnético se considera un recurso limitado y está regulado por las administraciones.

Hay otra cuestión que también llama la atención en la figura 20: los nombres no se corresponden exactamente con los de la tabla 1. Esto se debe a que la clasificación que os hemos mostrado se puede afinar mucho más según el ámbito en el que trabajemos. Pensad en ello por un momento con un tema que conocéis: la luz está en un rango que va de los 380 nm a los 780 nm de longitud de onda. Dentro de este rango sabemos que podemos encontrar los diversos colores: cada frecuencia corresponderá a un color (y de aquí viene el nombre *monocromáticas* cuando nos referimos a ondas que tienen una única frecuencia).

En la tabla 2 os hemos puesto este afinamiento, correspondiente a las ondas de radiofrecuencia, que son las que se utilizan en el mundo de la telecomunicación. Veréis que algunas fronteras no coinciden exactamente con las de la

Figura 20

De frecuencia más baja a más alta (longitud de onda más larga a más corta) hay ondas de radio, microondas, infrarrojo, visible, ultravioleta, rayos X y rayos γ. En el caso del visible, damos una ampliación con los diversos colores.

Los límites del rango de la luz visible están tomados para un ser humano estándar, ya que las frecuencias visibles varían de una persona a otra.

El espectro, ¿continuo?

Es cierto que el espectro es un continuo y, por tanto, parece que entre dos frecuencias deba haber un número infinito de frecuencias. Por ejemplo, si una emisora emite a 400 MHz y otra a 439 MHz, una tercera podría emitir a 439,5 MHz y, así, añadiendo decimales, siempre podemos encontrar “espacios” libres. No obstante, esto no es tan sencillo, ya que las emisoras emiten en realidad en una banda de frecuencias, es decir, en un estrecho rango de frecuencias alrededor de la frecuencia central. Si otra emisora emitiera muy cerca, habría interferencias.

tabla 1. De hecho, este subconjunto que os hemos puesto aquí, entre los 3 kHz y los 3.000 GHz tiene nombre propio: se denomina **espectro radioeléctrico**.

Tabla 2. Espectro radioeléctrico

Denominación	Rango de frecuencias	Longitudes de onda
Frecuencia extremadamente alta (*Extremely High Frequency*, EHF)	30 GHz - 300 GHz	10 mm - 1 mm
Frecuencia superalta (*Super High Frequency*, SHF)	3 GHz - 30 GHz	10 cm - 1 cm
Frecuencia ultraalta (*Ultra High Frequency*, UHF)	300 MHz - 3 GHz	100 cm - 10 cm
Frecuencia muy alta (*Very High Frequency*, VHF)	30 MHz - 300 MHz	10 m - 1 m
Alta frecuencia (*High Frequency*, HF)	3 MHz - 30 MHz	100 m - 10 m
Frecuencia media (*Medium Frequency*, MF)	300 kHz - 3 MHz	1 km - 100 m
Baja frecuencia (*Low Frequency*, LF)	30 kHz - 300 kHz	10 km - 1 km
Frecuencia muy baja (*Very Low Frequency* VLF)	3 kHz - 30 kHz	100 km - 10 km

Los nombres que aparecen en la tabla 2 son los que se utilizan habitualmente en el sector de las telecomunicaciones y derivan de sus siglas en inglés, que os hemos indicado entre paréntesis.

Así pues, hemos visto que la descripción de las ondas electromagnéticas armónicas, planas y monocromáticas que habíamos hecho en el subapartado 2.2 nos ha permitido clasificar las ondas, es decir, establecer el espectro electromagnético.

2.5. Qué hemos aprendido

En este apartado:

- Habéis visto cómo describir las ondas armónicas, planas y monocromáticas.
- También habéis aprendido la importancia de este tipo de ondas, ya que cualquier función periódica se podrá escribir como una suma de ondas de este tipo, gracias al teorema de Fourier.
- Finalmente, habéis aprendido a clasificar las ondas electromagnéticas según su frecuencia, lo que se conoce como *espectro electromagnético*.

Con todo esto, ya habéis podido ver cómo se genera una onda electromagnética a partir de algo tan básico como las leyes de Maxwell (apartado 1); y disponéis de las herramientas necesarias para describirlas y trabajar con ellas. De hecho, aquí os hemos mostrado solo una introducción, muy reducida, de lo que son las ondas electromagnéticas. A lo largo de la titulación iréis profundizando en esta cuestión; pero no solo esto, sino que se convertirán en el elemento fundamental de muchas asignaturas: solo tenéis que pensar que una señal no es más que una onda electromagnética.

3. Problemas resueltos

3.1. Enunciados

1. Tenemos un condensador de placas plano-paralelas en el vacío. Sus placas son circulares de 2 cm de radio y están separadas una distancia de 1 mm. Calculad la corriente de desplazamiento.

2. Calculad el campo magnético entre las placas del condensador del ejercicio anterior, si está conectado a una corriente de 10 A.

3. Tenemos un condensador en el vacío de placas plano-paralelas de capacidad C y conectado a un voltaje V:

a) Demostrad que la corriente de desplazamiento dentro de las placas de un condensador de placas plano-paralelas de capacidad C es $I_d = C\frac{dV}{dt}$.

b) Calculad el valor de la corriente de desplazamiento si $C = 5\ \mu$F y el potencial es de la forma $V = 30\,\text{sen}(5t)$ V.

4. Una onda electromagnética de frecuencia 5 MHz se desplaza en la dirección z. Escribid la expresión de su campo magnético si tiene una intensidad máxima de 10 T.

3.2. Soluciones

1. En este problema debemos calcular la corriente de desplazamiento, que sabemos viene dada por la ecuación 25:

$$I_D = \epsilon_0 \frac{d\phi_e}{dt} \tag{122}$$

donde ϕ_e está expresando en la ecuación 26:

$$\phi_e = \int_S \vec{E} d\vec{S} \tag{123}$$

Así pues, la estrategia para resolver el problema será:

1) Hallar el campo entre las placas del condensador.

2) Calcular el flujo que atraviesa las placas, ϕ_e, con la ecuación 123.

3) Derivar el flujo con respecto al tiempo para hallar la corriente de desplazamiento a partir de la ecuación 122.

De hecho, el primer paso no es necesario, ya que hemos calculado antes el campo en el interior de un condensador en el vacío. Volveremos a usar la figura 4, que reproducimos aquí como figura 21, pero añadiéndole el eje *x*.

Figura 21. Figura de resolución del problema 1

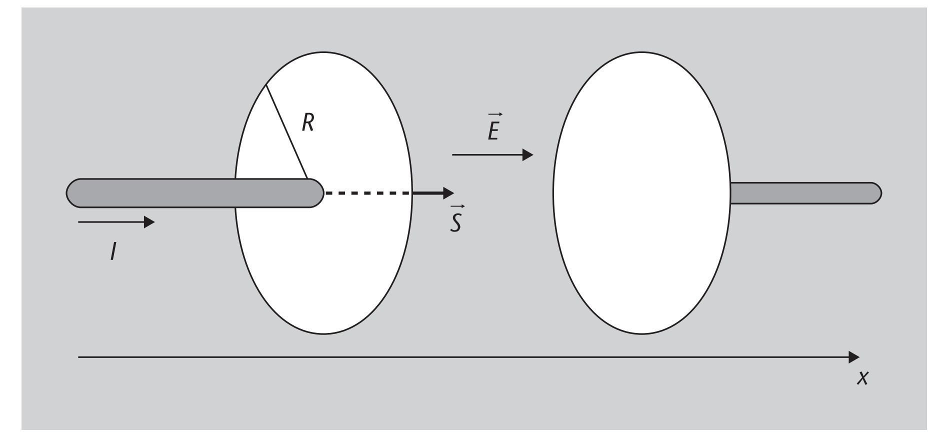


Figura 21

Campo eléctrico y vector superficie en el interior de un condensador, con el eje de coordenadas y el sentido que tomamos como positivo.

El campo va de una placa a la otra y vale:

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}\vec{i} \tag{124}$$

donde σ es la densidad de carga de las placas del condensador y ϵ_0, la permitividad del vacío. Sin embargo, al final siempre nos interesaba más trabajar con la carga que con la densidad de carga. Para hacerlo, debéis recordar que la carga se define como:

Las cargas se estudian en el módulo "Electrostática".

$$Q = \int_S \sigma dS \tag{125}$$

donde *S* es toda la superficie donde hay densidad de carga. Si la densidad de carga es constante en toda la superficie de las placas (como no nos dicen nada, supondremos que es así), σ puede salir de la integral y la ecuación 125 se convierte en:

$$Q = \int_S \sigma dS = \sigma \int_S dS = \sigma \cdot S \tag{126}$$

De aquí hallamos que la densidad de carga se puede poner en función de la carga total:

$$\sigma = \frac{Q}{S} \tag{127}$$

y sustituyendo la ecuación 127 en la 124 hallamos la expresión del campo dentro de un condensador en función de la carga:

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} = \frac{Q}{\epsilon_0 S}\vec{i} \tag{128}$$

Ahora ya podemos calcular el flujo, sustituyendo esta expresión dentro de la ecuación 123 y teniendo presente también que el vector campo, $\vec{E}$, y el vector superficie, $\vec{S}$, son paralelos (consultad la figura 21):

$$\phi_e = \int_S \vec{E} d\vec{S} \underbrace{=}_{\vec{E}||\vec{S}} \int_S E dS \tag{129}$$

Recordad

El producto escalar de dos vectores paralelos es el producto de sus módulos. Es decir, $\vec{A} \cdot \vec{B} = A \cdot B$, si $\vec{A}$ y $\vec{B}$ son paralelos.

Dado que E es constante en toda la superficie (lo podéis ver en la ecuación 128 o en la 124, en que el campo es constante), puede salir de la integral:

$$\phi_e = \int_S E dS \underbrace{=}_{E \text{ const.}} E \int_S dS = E \cdot S \tag{130}$$

Y sustituyendo el valor del módulo del campo, que podemos ver en la ecuación 128, hallamos:

$$\phi_e = E \cdot S = \frac{Q}{\epsilon_0 S} \cdot S = \frac{Q}{\epsilon_0} \tag{131}$$

Ahora ya podemos calcular la corriente de desplazamiento con la ecuación 122:

$$I_D = \epsilon_0 \frac{d\phi_e}{dt} = \epsilon_0 \frac{d}{dt}\left(\frac{Q}{\epsilon_0}\right) = \frac{\epsilon_0}{\epsilon_0}\frac{dQ}{dt} = \frac{dQ}{dt} \tag{132}$$

Esto podría parecer que fuera 0. Ahora bien, es una derivada total, no una derivada parcial. Esto significa que debemos tener en cuenta cualquier término que dependa de t. Y la carga lo hace, ya que un condensador está conectado a una red y se carga mediante una intensidad, I, como tenéis representado en la figura 21. Para la definición de intensidad:

$$I = \frac{dQ}{dt} \tag{133}$$

Por tanto, la $\frac{dQ}{dt}$ es la intensidad a la que están conectadas las placas del condensador, y la ecuación 132 queda:

$$I_D = I \tag{134}$$

Es decir, hemos encontrado que la corriente de desplazamiento es igual a la corriente que carga las placas del condensador. Si recordáis, para hallar esta expresión (véase el subapartado 1.3), buscamos que satisficiera precisamente esta condición.

2. Entre las placas del condensador no hay intensidad propiamente dicha, pero como hemos visto en el problema 1, sí que hay otro tipo de intensidad, la corriente de desplazamiento, que irá en la dirección del campo eléctrico. En la figura 22 tenéis representada esta situación (de hecho es la misma figura que la 3, pero hemos añadido el eje). Observad que, por la regla de la mano derecha, podemos prever que el campo magnético irá en la dirección indicada por la curva *C*.

Dado que podemos prever en qué dirección irá el campo magnético, y que el problema presenta simetría, podemos resolverlo utilizando la ley de Ampère del mismo modo que habíamos hecho en el módulo "Magnetostática e inducción electromagnética".

Figura 22. Figura del problema 2

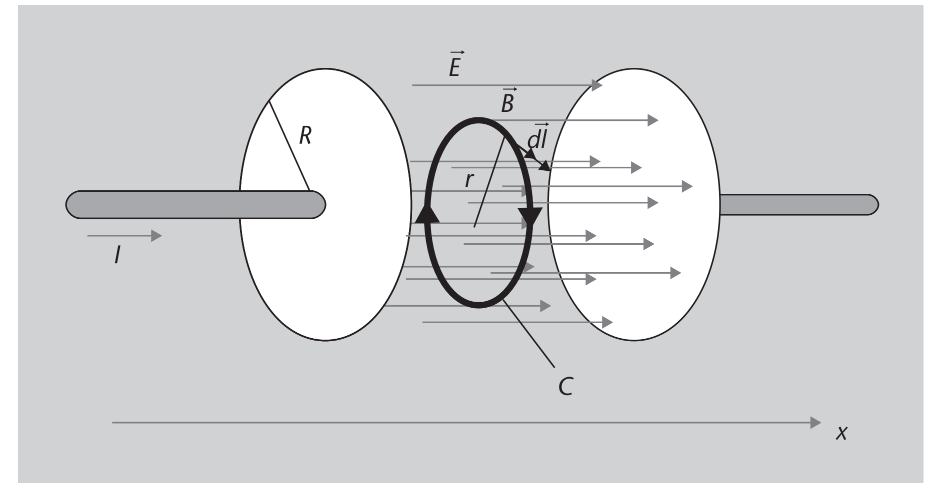


Figura 22

Campo en el interior de un condensador de placas circulares de radio *R*. En ella podéis ver dibujada la curva de Ampère de radio *r*.

Sin embargo, recordad que ahora tenemos que utilizar la ley de Ampère completa (ecuación 44):

$$\oint_C \vec{B}d\vec{l} = \mu_0 I_{\text{encerrada}} + \mu_0 I_D \tag{135}$$

En este caso $I_{\text{encerrada}} = 0$, con lo cual tenemos:

$$\oint_C \vec{B}d\vec{l} = \mu_0 I_D \tag{136}$$

Calculemos cada término por separado. Comencemos por calcular la circulación del campo magnético $\vec{B}$. Este campo será paralelo al diferencial d$\vec{l}$, como tenéis indicado en la figura. Además, por simetría, ya vemos que va a ser constante en toda la curva *C* y, por tanto, podrá salir de la integral. Estos pasos son:

$$\oint_C \vec{B}d\vec{l} \underbrace{=}_{\vec{B}\|d\vec{l}} \oint_C Bdl \underbrace{=}_{B\text{ const.}} B\oint_C dl = B2\pi r \tag{137}$$

donde hemos utilizado, en el último paso, que la longitud de la circunferencia es $2\pi r$.

Vayamos ahora al segundo miembro de la ecuación 136. En el problema 1 ya hemos hallado I_D (ecuación 134), que era igual a la intensidad I a la que estaba conectado el condensador. Ahora bien, aquella es la I_D correspondiente a toda la superficie de las placas; sin embargo, ahora tenemos que tomar solo la que corresponde a la superficie encerrada por la curva C. Para hallarla, podemos determinar en primer lugar la I_D por unidad de superficie, es decir, dividir I_D por la superficie de las placas del condensador (πR^2) y multiplicar entonces por la superficie encerrada por la curva C (πr^2):

$$I_{D,\text{encerrada}} = I_D \frac{\pi r^2}{\pi R^2} = I_D \frac{r^2}{R^2} = I \frac{r^2}{R^2} \quad (138)$$

donde hemos utilizado que la intensidad a la que está conectado el condensador es I. Ahora igualamos las ecuaciones 137 y 138 y hallamos:

$$\oint_C \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 I_{D,\text{encerrada}} \quad (139)$$

$$B 2\pi r = \mu_0 I \frac{r^2}{R^2} \quad (140)$$

$$B = \mu_0 I \frac{r}{2\pi R^2} \quad (141)$$

Con este resultado ya podemos sustituir los valores correspondientes:

$$B = \frac{4\pi \cdot 10^{-7}\ \text{N/A}^2 \cdot 10\ \text{A}}{2\pi \cdot (0{,}02\ \text{m})^2} r = 5 \cdot 10^{-3} r\ [\text{T}] \quad (142)$$

Fijaos en que hemos hallado el valor en módulo, que es lo que hallamos con la ley de Ampère.

3.

a) Para responder a esta pregunta partiremos del resultado del problema 1. En la ecuación 134 hemos encontrado que:

$$I_D = I \quad (143)$$

Por otro lado, hemos visto varias veces (por ejemplo en la ecuación 133) que:

$$I = \frac{dQ}{dt} \quad (144)$$

Ya hemos visto que la capacidad C del condensador viene dada por la expresión:

La capacidad de un condensador se estudia en el módulo "Electrostática".

$$C = \frac{Q}{\Delta V} \quad (145)$$

donde ΔV es la diferencia de potencial entre sus placas. Por tanto, podemos despejar Q en la ecuación 145:

$$Q = C \cdot V \qquad (146)$$

y sustituir en la ecuación 144, teniendo presente que la capacidad es constante y que $I = I_D$ (ecuación 143):

$$I_D = \frac{dQ}{dt} = \frac{d(CV)}{dt} = C\frac{dV}{dt} \qquad (147)$$

que es lo que queríamos demostrar.

b) En este apartado solo tenemos que sustituir lo que nos dan, en la ecuación 147:

$$I_D = C\frac{dV}{dt} = 5 \cdot 10^{-6} \text{ F} (30 \cdot 5 \cdot \cos(5t)) \text{ V} = 7{,}5 \cdot 10^{-4} \cdot \cos(5t) \text{ A} \qquad (148)$$

4. Para escribir la expresión del campo magnético debemos comparar los datos que nos dan con la expresión 82:

$$\vec{B}(x,t) = \vec{B}_0 \cos(kr - \omega t) \qquad (149)$$

En este caso nos dicen que:

$$f = 5 \text{ MHz} \qquad (150)$$

$$B_0 = 10 \text{ T} \qquad (151)$$

Podemos hallar ω a partir de f utilizando la expresión 98:

Recordad que el prefijo mega (M) indica 10^6. Por tanto, 1 MHz = 10^6 Hz.

$$\omega = 2\pi f = 2\pi \cdot 5 \cdot 10^6 \text{ Hz} = 10\pi \cdot 10^6 \text{ Hz} \qquad (152)$$

Para hallar k podemos utilizar la ecuación 101:

$$f = \frac{c}{\lambda} \qquad (153)$$

Recordad que la velocidad de la luz es c = 2,9979 · 10^8 m/s.

y combinarla con la ecuación 83:

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \qquad (154)$$

Para hacerlo, despejamos λ en la ecuación 154:

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} \quad (155)$$

y sustituimos esta λ en la ecuación 153:

$$f = \frac{c}{2\pi}k \quad (156)$$

A partir de esta expresión ya podemos despejar k y calcularla:

$$k = \frac{2\pi}{c}f = 0{,}1 \text{ m}^{-1} \quad (157)$$

Además, nos dicen que la onda se desplaza en la dirección z. Esto quiere decir que r va a ser z. Por otro lado, si miráis la figura 8 y cambiáis los ejes para que la onda dibujada se desplace en la dirección z, deberá oscilar en la dirección y. Lo tenéis representado en la figura 23.

Figura 23. Figura del problema 4

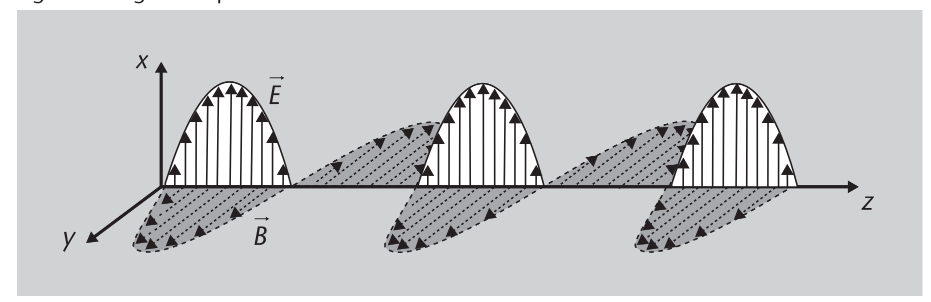


Figura 23

Representación de la onda completa de los campos eléctrico y magnético en la dirección de propagación.

Con esto ya tenemos todos los ingredientes para expresar el campo magnético (ecuación 149) a partir de los resultados obtenidos en las ecuaciones 151, 152 y 157:

$$\vec{B}(z,t) = B_0 \cos(kz - \omega t)\vec{j} = 10 \cos(0{,}1z - 10\pi \cdot 10^6 t)\vec{j} \quad (158)$$

Resumen

En este módulo hemos comenzado viendo que las diversas ecuaciones del electromagnetismo que habéis estudiado en módulos anteriores (la ley de Gauss, la ley de Gauss para el campo magnético, la ley de Faraday-Lenz y la ley de Ampère) forman parte de un conjunto único, que es el de las ecuaciones de Maxwell. Estas ecuaciones explican todos los fenómenos del electromagnetismo. No obstante, hemos comprobado que una de ellas, la ley de Ampère, estaba incompleta. Para completarla, hemos introducido la corriente de desplazamiento y hemos visto que una variación de flujo de campo eléctrico produce un campo magnético. Una vez completada la ley de Ampère, ya hemos podido escribir las **leyes de Maxwell** totalmente completas.

Con las leyes de Maxwell en su forma completa, hemos podido ver que una variación del flujo de campo magnético genera un campo eléctrico (ley de Faraday-Lenz) y que una variación del flujo de campo eléctrico genera un campo magnético (ley de Ampère). Con estos dos fenómenos es posible llegar a la conclusión de que los campos eléctrico y magnético se realimentan mutuamente y pueden propagarse, incluso en el vacío. Además, hemos visto que cumplen una ecuación que se conoce como **ecuación de onda** y cuya solución son los campos eléctrico y magnético correspondientes a una **onda plana**, **armónica** y **monocromática**:

$$\vec{E}(r,t) = \vec{E}_0 \cos(kr - \omega t) \tag{159}$$

$$\vec{B}(r,t) = \vec{B}_0 \cos(kr - \omega t) \tag{160}$$

Llegados a este punto, hemos definido los conceptos necesarios para describir las ondas: el frente de onda, la amplitud, la longitud de onda, el número de onda, la frecuencia, la frecuencia angular, el período y la fase.

Finalmente, hemos visto que la frecuencia caracteriza las ondas monocromáticas y es lo que determina si una onda pertenece, por ejemplo, a la parte visible del espectro o a la parte de las ondas de radio. Os hemos mostrado entonces el espectro electromagnético, y hemos puesto un énfasis especial en la zona correspondiente a las ondas de radio.

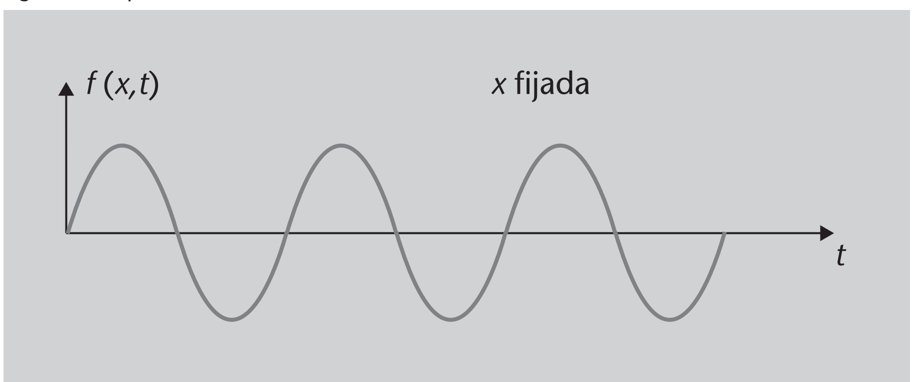
Ejercicios de autoevaluación

1. La corriente de desplazamiento aparece cuando hay una variación de...
a) ... campo eléctrico.
b) ... campo eléctrico con el tiempo.
c) ... flujo de campo eléctrico.
d) ... flujo de campo eléctrico con el tiempo.

2. Una función del tipo $f(x,t) = A\cos(kx - \omega t)$...
a) ... es periódica solo en el tiempo.
b) ... es periódica solo en el espacio.
c) ... es periódica en el tiempo y en el espacio.
d) ... no es periódica.

3. La distancia entre dos máximos consecutivos en la figura 24 es...
a) ... la frecuencia.
b) ... el período.
c) ... la longitud de onda.
d) ... el número de onda.

Figura 24. Representación de una onda



4. La frecuencia es...
a) ... el número de oscilaciones que completa una onda por segundo.
b) ... la inversa del período.
c) ... c/λ .
d) Todas las otras respuestas son ciertas.

5. ¿Cuál de las siguientes ondas es monocromática?
a) $f(x) = \log(x)$
b) $f(x,t) = A\cos(kx - \omega t)$
c) $f(x,t) = A\cos(kx - \omega_1 t - \omega_2 t)$
d) $f(x,t) = A\cos(kx)$

6. ¿Cuál de las siguientes expresiones corresponde a una onda armónica?
a) $f(x) = \log(x)$
b) $f(x,t) = A\log(kx - \omega t)$
c) $f(x,t) = A\cos(kx - \omega t)$
d) Todas las anteriores.

7. Un campo eléctrico descrito por la expresión $\vec{E}(y,t) = 50\cos(1{,}3 \cdot 10^7 y - 2\pi \cdot 10^{14} t)\vec{k}$ N/C vibra en...
a) ... la dirección x.
b) ... la dirección z.
c) ... la dirección y.
d) ... todas las direcciones a la vez.

8. Un campo magnético descrito por la expresión $\vec{B}(y,t) = 50\cos(2\pi \cdot 10^{14} t - 1{,}3 \cdot 10^7 y)\vec{i}$ T se desplaza en...
a) ... la dirección x.
b) ... la dirección z.
c) ... la dirección y.
d) ... todas las direcciones a la vez.

9. Un campo eléctrico descrito por la expresión $\vec{E}(y,t) = 50\cos(2\pi \cdot 10^{14}t - 2\pi \cdot 2 \cdot 10^{6}y)\vec{k}$ N/C tiene un período de...

a) ... $1{,}6 \cdot 10^{-15}$ s.
b) ... $7{,}7 \cdot 10^{-8}$ s.
c) ... $1{,}3 \cdot 10^{-8}$ s.
d) ... $1 \cdot 10^{-14}$ s.

10. Un campo eléctrico descrito por la expresión $\vec{E}(y,t) = 50\cos(2\pi \cdot 10^{14}t - 2\pi \cdot 2 \cdot 10^{6}y)\vec{k}$ N/C tiene una longitud de onda de...

a) ... $5 \cdot 10^{-7}$ m.
b) ... $8 \cdot 10^{-8}$ m.
c) ... $1{,}6 \cdot 10^{-15}$ m.
d) ... $7{,}7 \cdot 10^{-8}$ m.

11. La parte del espectro a la que pertenece una onda depende...

a) ... de la frecuencia de la onda.
b) ... del medio por el que se propaga la onda.
c) ... de la frecuencia y del medio por el que se propaga la onda.
d) ... del dispositivo que recibe la onda.

Soluciones

1. d; **2.** c; **3.** b; **4.** d; **5.** b; **6.** c; **7.** b; **8.** c; **9.** d; **10.** a; **11.** a

Glosario

amplitud *f* Separación máxima de la posición de equilibrio en un movimiento ondulatorio que varía periódicamente.

corriente de desplazamiento *m* Variación con el tiempo del flujo de campo eléctrico a través de una superficie, multiplicada por la permitividad eléctrica del medio (ϵ o, en el caso del vacío, ϵ_0). No es una corriente en sentido estricto, ya que no es consecuencia de un movimiento de cargas. Genera un campo magnético y está asociada a la ley de Ampère.

ecuación de onda *f* Ecuación diferencial en derivadas parciales lineal y de segundo orden que describe la propagación de una gran variedad de ondas.

espectro electromagnético *m* Distribución del conjunto de ondas electromagnéticas ordenada por frecuencias.

fase *f* Situación instantánea de una onda periódica. Se mide en radianes.

fase inicial *f* Valor de la fase de una onda periódica en el instante inicial. Se mide en radianes.

frecuencia *f* Número de oscilaciones que hace una onda periódica en un segundo. Se representa con la letra *f* o la letra griega ν (nu) y se mide en hercios (Hz).

frecuencia angular *f* Número de oscilaciones que hace una onda periódica en un ciclo de 2π radianes. Se representa con la letra griega ω (omega) y se mide en rad/s o s^{-1}.

infrarrojo *m* Zona del espectro electromagnético entre 300 GHz y 384 THz de frecuencia (o entre 780 nm y 1 mm de longitud de onda).

ley de Ampère *f* Una de las ecuaciones de Maxwell en forma integral, que afirma que la circulación del campo magnético sobre una curva cualquiera es igual a la intensidad que atraviesa la curva multiplicada por la permeabilidad magnética del medio (μ o, en el caso del vacío, μ_0) más la corriente de desplazamiento.

ley de Faraday-Lenz *f* Una de las ecuaciones de Maxwell en forma integral, que afirma que la circulación del campo eléctrico es igual a la variación en el tiempo del flujo del campo magnético, con signo negativo. Este signo negativo se conoce específicamente como ley de Lenz.

ley de Gauss *f* Una de las ecuaciones de Maxwell en forma integral, que afirma que el flujo que atraviesa una superficie cerrada es igual a la carga encerrada por la superficie dividida por la permitividad eléctrica del medio (ϵ o, en el caso del vacío, ϵ_0).

ley de Gauss para el campo magnético *f* Una de las ecuaciones de Maxwell en forma integral, que afirma que el flujo de campo magnético que atraviesa una superficie cerrada es igual a cero. Esta ecuación establece que no hay cargas magnéticas y que, por tanto, las líneas de campo magnético son cerradas.

ley de Lenz *f* Signo negativo de la ley de Faraday-Lenz.

leyes de Maxwell *f pl* Conjunto de cuatro ecuaciones (la ley de Gauss, la ley de Gauss para el campo magnético, la ley de Ampère y la ley de Faraday-Lenz) que describen todos los fenómenos electromagnéticos.

longitud de onda *f* Distancia entre dos puntos en el mismo estado de vibración en una onda periódica. Se representa con la letra griega λ (lambda) y se mide en metros (m).

microondas *f pl* Zona del espectro electromagnético entre 1 GHz y 300 GHz de frecuencia (o entre 1 mm y 30 cm de longitud de onda).

número de onda *m* Número de veces que vibra una onda en un ciclo de 2π radianes. Se representa con la letra *k* y se mide en m^{-1} o bien en rad/m.

onda *f* Propagación de una perturbación (que puede ser densidad, presión, campo eléctrico, campo magnético, etc.) con transporte de energía y de momento lineal, pero no de materia.

onda electromagnética *f* Onda en la cual la perturbación que se propaga consiste en una variación de los campos eléctrico y magnético.

período *f* Tiempo que tarda una onda periódica en hacer una oscilación completa. Se representa con la letra T y se mide en segundos (s).

radio *f* Zona del espectro electromagnético por debajo de 1 GHz de frecuencia (o por encima de 1 m de longitud de onda).

rayos γ *m pl* Zona del espectro electromagnético por encima de 30 EHz de frecuencia (o por debajo de 10 pm de longitud de onda).

rayos X *m pl* Zona del espectro electromagnético entre 30 PHz y 30 EHz de frecuencia (o entre 10pm y 10 nm de longitud de onda).

ultravioleta *m* Zona del espectro electromagnético entre 789 THz y 30 PHz de frecuencia (o entre 200 nm y 380 nm de longitud de onda).

visible *m* Zona del espectro electromagnético entre 384 THz y 789 TH de frecuencia (o entre 380 nm y 780 nm de longitud de onda).

Bibliografía

Alonso, M.; Finn, E. J. (1998). *Física. Campos y ondas* (vol. 2). México: Editorial Addison Wesley Logman.

Chabay, R; Sherwood, B. (1995). *Electric & Magnetic Interactions*. Nueva York: John Wiley & Sons, Inc.

Feynman, R. P.; Leighton, R. B.; Sands, M. (1987). *Física. Electromagnetismo y materia* (vol. II). Pearson Addison Wesley.

Reitz, J. R.; Milford, F. J. (2001). *Fundamentos de la teoría electromagnética* (1a edición). México: Editorial Alhambra Mexicana, S. A.

Tipler, P. A.; Mosca, G. (2005). *Física para la ciencia y la tecnología* (5.ª edición, vol. 1B). Barcelona: Editorial Reverté.

Wikipedia: http://es.wikipedia.org/wiki/Wikipedia:Portada. Última consulta: 7 de marzo de 2010.

Wikipedia: http://en.wikipedia.org. Última consulta: 7 de marzo de 2010.